ГЛАВА III. ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ.

§11. Многокритериальная оптимизация.

В теории игр обычно интересуются стратегиями, оптимальными в некотором смысле для всех игроков. Например, в играх многих лиц мы рассматривали ситуации равновесия, устойчивые относительно возможных отклонений одного игрока. В данной главе предполагается, что имеется одно *лицо, принимающее решение* (ЛПР), выбирающее стратегию $x \in X$. При этом возможно наличие неопределенностей. Типичным примером неопределенности является стратегия второго игрока по отношению к первому игроку (ЛПР) в игре двух лиц. Здесь у первого игрока имеется один критерий оценки исходов – его функция выигрыша.

В данном параграфе мы рассмотрим как бы противоположный случай: имеется одно ЛПР, но стратегия $x \in X$ оценивается не скалярным, а *векторным критерием* $W(x) = (W_1(x), ..., W_s(x))$. При этом каждый *частный* критерий $W_i(x)$ желательно максимизировать. Если по смыслу этот критерий желательно минимизировать, то его можно заменить на $-W_i(x)$. Итак, неопределенность здесь выражается неясностью цели ЛПР (несколько критериев).

Задача многокритериальной оптимизации заключается в выборе $x \in X$ при наличии векторного критерия $W(x)$. Какую стратегию $x \in X$ следует выбирать ЛПР ? Ответ на этот вопрос не прост. Дело в том, что, как правило, не существует стратегии $x^0 \in Arg \max\limits_{x \in X} W_i(x),\ i = 1, ..., s$.

Пример. Пусть $X = \{x^1, x^2, x^3, x^4\},\ s = 2$ и векторные оценки стратегий располагаются на плоскости (W_1, W_2), как это показано на рисунке.

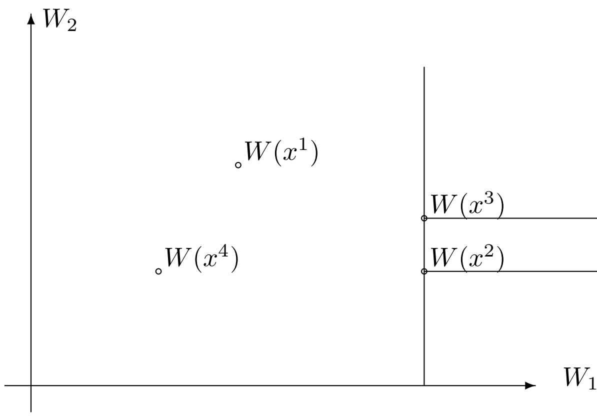


Рис. 11.1

Здесь $\mathrm{Arg} \max\limits_{x \in X} W_1(x) = \{x^2, x^3\},\ \mathrm{Arg} \max\limits_{x \in X} W_2(x) = \{x^1\}$.

При решении многокритериальных задач используют стратегии, *оптимальные по Парето.*

Определение. Стратегия $x^0 \in X$ называется оптимальной по Парето, если не существует такой стратегии $x \in X$, что $W_i(x) \geq W_i(x^0),\ i = 1, ..., s$, и хотя бы одно неравенство выполнено как строгое, т.е. $W(x) \neq W(x^0)$.

Множество всех оптимальных по Парето стратегий обозначим через $\Pi(X, W)$. В рассмотренном примере $\Pi(X, W) = \{x^1, x^3\}$. Отметим простой способ проверки оптимальности по Парето стратегии x. Пусть $Y = W(X)$ – множество векторных оценок, отвечающих всевозможным стратегиям $x \in X$. Сдвигаем неотрицательный ортант $E^s_+ = \{y \in E_s \mid y_i \geq 0,\ i = 1, ..., s\}$ евклидова пространства E^s в точку $W(x)$. Если сдвинутый ортант (включая его границы) не содержит других векторов, кроме $W(x)$, то $x \in \Pi(X, W)$. Более формально условие оптимальности по Парето для стратегии x записывается в виде $(W(x) + E^s_+) \cap Y = \{W(x)\}$.

Часто используют более слабое определение оптимальности.

Определение. Стратегия $x^0 \in X$ называется оптимальной по Слейтеру, если не существует такой стратегии $x \in X$, что $W_i(x) > W_i(x^0),\ i = 1, ..., s$.

Множество всех оптимальных по Слейтеру стратегий обозначим через $S(X, W)$. В рассмотренном примере $S(X, W) = \{x^1, x^2, x^3\}$. Отметим, что стратегия x тогда и только тогда является оптимальной по Слейтеру, когда положительный ортант, сдвинутый в точку $W(x)$, не содержит *внутри себя* никаких векторных оценок.

Из определений следует, что $\Pi(X, W) \subset S(X, W)$. В приведенном примере оптимальные по Парето стратегии x^1, x^3 не эквивалентны, то есть $W(x^1) \neq W(x^3)$, и возникает проблема выбора $x \in \Pi(X, W)$.

Рассмотрим области приложений многокритериальных задач. Мы уже встречались с оптимальными по Парето ситуациями в играх многих лиц. Другие примеры дает экономика. Деятельность предприятия оценивается по нескольким показателям: прибыль, себестоимость продукции, валовой выпуск и т.п. Активы банка оцениваются обычно по двум показателям: доходность и риск. Еще одна область приложений – проектирование сложных технических объектов. Например, конструкция автомобиля оценивается по нескольким техническим характеристикам: скорость, грузоподъемность, экономичность двигателя и т.д. В качестве простейшего примера рассмотрим задачу проектирования коробки.

Имеется прямоугольник из металла размера $a \times b,\ a \leq b$. Из четырех углов прямоугольника вырезаются квадраты со стороной $x \in X = [0, a/2)$

и материал сгибается вдоль линий, отмеченных на рис. пунктиром.

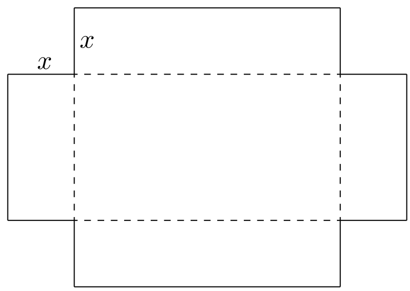


Рис. 11.2. Развертка коробки.

Пусть $V(x) = x(a-2x)(b-2x)$ – объем коробки, $S(x) = 4x^2$ – сэкономленная площадь пластины. Оба критерия желательно максимизировать. Критерий $V(x)$ возрастает на отрезке $[0, x^*]$ и убывает на полуинтервале $[x^*, a/2)$, где

$$x^* = \frac{a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}.$$

Следовательно, $\Pi(X, W) = [x^*, a/2)$.

Решение многокритериальной задачи будем понимать в следующем смысле. Сначала находим множество $\Pi(X, W)$ или $S(X, W)$. Затем используется какой-либо метод сужения этих множеств, т.е. выделяются подмножества $\Pi' \subset \Pi(X, W)$ или $S' \subset S(X, W)$. Окончательный выбор стратегии из Π' или S' производит ЛПР.

Возникает вопрос: когда множество $\Pi(X, W)$ не пусто?

Теорема 3.1. Пусть X – компакт метрического пространства, а частные критерии $W_i(x), i = 1, ..., s$, непрерывны на X. Тогда множество $\Pi(X, W)$ не пусто.

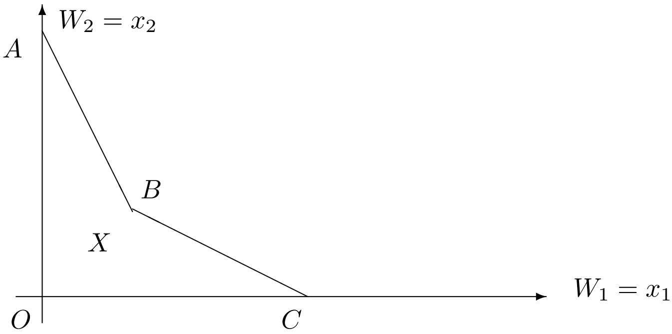
Доказательство. Рассмотрим следующую *свертку* векторного критерия: $F_1(\lambda, x) = \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i W_i(x)$,

$$\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_s) \in \Lambda = \{\lambda \mid \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1,\ \lambda_i > 0,\ i = 1, ..., s\}.$$

Покажем, что $X_1(\lambda) \overset{\text{def}}{=} Arg \max\limits_{x \in X} F_1(\lambda, x) \subset \Pi(X, W)$. Заметим, что множество $X_1(\lambda)$ не пусто, поскольку функция $F_1(\lambda, x)$ непрерывна на компакте X. Предположим противное, то есть $\exists\ x' \in X_1(\lambda) \backslash \Pi(X, W)$. Тогда $\exists\ x \in X$: $W_i(x) \geq W_i(x'), i = 1, ..., s$ и $W(x) \neq W(x')$. Домножим каждое неравенство на $\lambda_i > 0$ и сложим их. В результате получим $\sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i W_i(x) > \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i W_i(x)$. Это противоречит тому, что $x' \in X_1(\lambda)$. ■

Таким образом, максимизируя свертку $F_1(\lambda, x)$, можно получать оптимальные по Парето стратегии. Но для всякого ли $x \in \Pi(X, W)$ $\exists \lambda \in \Lambda : x \in X_1(\lambda)$? Ответ в общем случае отрицательный.

Пример. Пусть $s = 2,\ x = (x_1, x_2) = W(x)$. Множество X – невыпуклый четырехугольник $OABC$ – изображено на рисунке.



Здесь ломаная ABC – множество $\Pi(X, W)$. При положительных λ_1, λ_2 множество $X_1(\lambda)$ содержится в двухточечном множестве $\{A, C\}$.

Рассмотрим другую свертку $F_2(\lambda, x) = \min\limits_{1 \leq i \leq s} \lambda_i W_i(x)$, где $\lambda \in \Lambda$. При использовании этой свертки будем предполагать, что $W_i(x) > 0,\ \forall x \in X,\ i = 1, ..., s$. Это не является ограничением общности.

Упражнение. Докажите, что если ко всем частным критериям добавить положительные константы, то множество $\Pi(X, W)$ не изменится.

Теорема 3.2.(Ю.Б.Гермейер). Пусть все частные критерии $W_i(x)$ непрерывны и положительны на компакте X метрического пространства. Тогда

$$S(X, W) = \cup_{\lambda \in \Lambda} X_2(\lambda). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in \Lambda$. Докажем, что $X_2(\lambda) \subset S(X, W)$. Предположим, что $\exists\ x' \in X_2(\lambda) \backslash S(X, W)$. Тогда $\exists\ x \in X : W_i(x) > W_i(x'),\ i = 1, ..., s$. Отсюда $\min\limits_{1 \leq i \leq s} \lambda_i W_i(x) > \min\limits_{1 \leq i \leq s} \lambda_i W_i(x')$. Это противоречит тому, что $x' \in X_2(\lambda)$. Итак, доказано, что правая часть (1) содержится в левой.

Обратно. Пусть $x^0 \in S(X, W)$. Найдем $\lambda^0 \in \Lambda : x^0 \in X_2(\lambda^0)$. Положим

$$\lambda_i^0 = \frac{1}{W_i(x^0) \sum\limits_{k=1}^{s} \frac{1}{W_k(x^0)}},\ i = 1, ..., s.$$

Тогда $F_2(\lambda^0, x^0) = \min\limits_{1 \leq i \leq s} \lambda_i^0 W_i(x^0) = \Big(\sum\limits_{k=1}^{s} \frac{1}{W_k(x^0)} \Big)^{-1}$. Пусть $x \in X,\ x \neq x^0$.

Тогда $\exists\, i_1 : W_{i_1}(x) \le W_{i_1}(x^0)$. Имеем

$$F_2(\lambda^0, x) = \min_{1 \le i \le s} \lambda_i^0 W_i(x) \le \lambda_{i_1}^0 W_{i_1}(x) \le \lambda_{i_1}^0 W_{i_1}(x^0) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{s} \frac{1}{W_k(x^0)} \right)^{-1} = F_2(\lambda^0, x^0).$$

Отсюда следует, что $x^0 \in X_2(\lambda^0)$. ■

К сожалению, не всегда $X_2(\lambda) \subset \Pi(X, W)$.

Пример. Как и в предыдущем примере, положим $W(x) = x = (x_1, x_2) \in X = [0,1]^2$. Здесь

$$F_2(\lambda, x) = \min[\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2],\ \Pi(X, W) = \{(1,1)\}.$$

Рассмотрим линию уровня функции $F_2(\lambda, x)$ – множество вида $\{x \mid F_2(\lambda, x) = C\}$. На рисунке изображена линия уровня при $\lambda_1 < \lambda_2$.

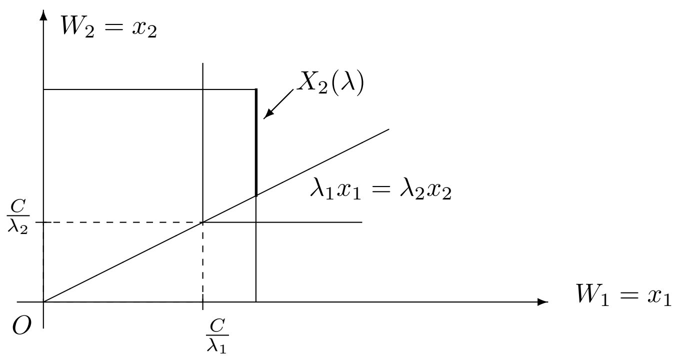


Рис. 11.3

Если $\lambda_1 x_1 > \lambda_2 x_2$, то линия уровня определяется уравнением $F_2(\lambda, x) = \lambda_2 x_2 = C$. Аналогично при $\lambda_1 x_1 < \lambda_2 x_2$ соответствующее уравнение имеет вид $F_2(\lambda, x) = \lambda_1 x_1 = C$. Это означает, что линия уровня функции $F_2(\lambda, x)$ представляет собой "угол". При $\lambda_1 \ne \lambda_2$ множество $X_2(\lambda)$ является отрезком, содержащим оптимальную по Парето стратегию (1,1).

Итак, свертка $F_1(\lambda, x)$ позволяет получить лишь часть оптимальных по Парето стратегий, а свертка $F_2(\lambda, x)$ позволяет построить множество $S(X, W)$. Однако, комбинация этих сверток $F_2(\lambda, x) + \alpha F_1(\lambda, x)$ позволяет строить аппроксимации множества $\Pi(X, W)$.

Рассмотрим вопрос о построении множеств $\Pi(X, W)$ и $S(X, W)$. Вначале рассмотрим случай, когда множество X конечно, то есть $X = \{x^1, ..., x^m\}$. Рассмотрим способ сравнения стратегий x и x' (в смысле Парето):

$$W_i(x) \ge W_i(x'), i = 1, ..., s,\ W(x) \ne W(x') \tag{1}$$

В этом случае будем говорить, что стратегия x лучше стратегии x' по векторному критерию $W(x)$. Условие (1) задает бинарное отношение на множестве всех стратегий X. Нетрудно проверить что это отношение транзитивно.

Рассмотрим алгоритм построения множества $\Pi(X, W)$. Пусть Π – переменное множество, состоящие из попарно несравнимых стратегий. Напомним, что $X = x^1, ..., x^m$.

Шаг 1. Положим $\Pi = \{x^1\}$.

Пусть сделано k шагов по алгоритму и получено множество Π.

Шаг $k+1$. Берем очередную стратегию x^{k+1} и сравниваем ее со всеми стратегиями из множества Π. Здесь могут встретится следующие случаи:

а) Найдется стратегия из множества Π, которая лучше стратегии x^{k+1}. В этом случае стратегия x^{k+1} отбрасывается, множество Π не меняется и переходим к следующему шагу.

б) Стратегия x^{k+1} лучше некоторых стратегий из множества Π. Все такие худшие стратегии отбрасываем, получаем множество Π' и полагаем $\Pi := \Pi' \cup \{x^{k+1}\}$. Затем переходим к следующему шагу.

в) Стратегия x^{k+1} не сравнима со стратегиями из множества Π. Тогда полагаем $\Pi := \Pi \cup \{x^{k+1}\}$ и переходим к следующему шагу. В результате после m шагов получаем $\Pi(X, W) = \Pi$.

Упражнение. Покажите, что случаи а) и б) не могут выполняться одновременно.

Этот алгоритм эффективен в том смысле, что не сводится к полному перебору: если какая-то стратегия отброшена, то она не участвует в дальнейших сравнениях. Если в (1) все неравенства строгие, то алгоритм строит множество $S(X, W)$.

Пусть теперь множество X состоит из бесконечного числа элементов. Обычно оно задается в евклидовом пространстве ограничениями вида равенств и неравенств. На множестве X можно задать сетку из конечного числа точек, а затем применить предложенный алгоритм.

Другой подход состоит в аналитическом методе построения множества $\Pi(X, W)$, которое пытаются задать ограничениями вида равенств или неравенств. Такой подход основан на использовании условий, которым должны удовлетворять оптимальные по Парето или Слейтеру стратегии. Приведем пример таких условий для случая вогнутых критериев на выпуклом компакте евклидова пространства E^n.

Определение. Пусть $x^0 \in X$. Говорят, что вектор $\alpha \in E^n$ задает в точке x^0 направление, допустимое для множества X, если найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что $x^0 + \varepsilon x \in X$ для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$.

По смыслу, двигаясь из точки x^0 в направлении α, мы некоторое время будем оставаться в множестве X. Множество всех допустимых в точке x^0 направлений обозначим через $\mathcal{L}(x^0)$.

Для x^0, внутренней точки множества X, любое направление является допустимым. Для граничной точки круга на плоскости допустимо любое направление, ведущее внутрь круга. Касательное направление допустимым не является.

Теорема 3.3. Пусть все частные критерии $W_i(x),\ i = 1, ..., s$ вогнуты и непрерывно дифференцируемы на выпуклом компакте X евклидова пространства. Тогда для того, чтобы $x^0 \notin S(X, W)$ необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое допустимое направление $\alpha \in \mathcal{L}(x^0)$, что

$$(W_i'(x^0), \alpha) > 0,\ i = 1, ..., s. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость. Допустим, что $x^0 \notin S(X, W)$. Тогда $\exists\, x \in X : W_i(x) > W_i(x^0),\ i = 1, ..., s$. По свойству вогнутых функций

$$(W_i'(x^0), x - x^0) \geq W_i(x) - W_i(x^0) > 0,\ i = 1, ..., s,$$

то есть условие (2) выполнено для допустимого направления $\alpha = x - x^0$.

Достаточность. Предположим,что для некоторого $\alpha \in \mathcal{L}(x^0)$ выполнено условие (2). По определению допустимого направления найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех

$$\varepsilon : 0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0 \Rightarrow x^0 + \varepsilon\alpha \in X.$$

Тогда по формуле конечных приращений Лагранжа

$$W_i(x^0 + \varepsilon\alpha) - W_i(x^0) = (W_i'(x^0 + \theta_i\varepsilon\alpha), \varepsilon\alpha) = \varepsilon(W_i'(x^0 + \theta_i\varepsilon\alpha), \alpha),$$

где $0 < \theta_i < 1$. Пусть $\varepsilon \to +0$. Тогда, используя непрерывность градиента $W_i'(x)$, получим

$$\lim_{\varepsilon \to +0} (W_i'(x^0 + \theta_i\varepsilon\alpha), \alpha) = (W_i'(x^0), \alpha) > 0,\ i = 1, ..., s$$

по условию (2). Отсюда при малом $\varepsilon > 0$

$$W_i(x^0 + \varepsilon\alpha) - W_i(x^0) = \varepsilon(W_i'(x^0 + \varepsilon\theta_i\alpha), \alpha) > 0,\ i = 1, ..., s.$$

Поэтому стратегия $x^0 + \varepsilon\alpha$ строго лучше, чем стратегия x^0 и $x^0 \notin S(X, W)$.
■

Отметим следующий частный случай. Допустим, что критерии $W_i(x)$ строго вогнуты. Тогда $S(X, W) = \Pi(X, W)$. Действительно, предположим, что $\exists\, x' \in S(X, W) \setminus \Pi(X, W)$. Тогда $\exists\, x : W_i(x) \geq W_i(x'), i = 1, ..., s, W(x) \neq W(x')$. Отсюда $x \neq x'$ и $W_i(\frac{x+x'}{2}) > \frac{W_i(x)+W_i(x')}{2} \geq W_i(x'),\ i = 1, ..., s$. Это означает, что $x' \notin S(X, W)$ (противоречие). Поэтому для строго вогнутых критериев теорема 3.3 дает необходимые и достаточные условия для оптимальных по Парето стратегий. Рассмотрим пример использования полученных условий.

Пример. Пусть $x = (x_1, ..., x_m),\ K = \{1, ..., m\}$. Для каждого подмножества $J \subset K$ рассмотрим критерий:

$$W_J(x) = \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{m} x_k^2} - \sum_{k \in J} x_k + \sum_{k \notin J} x_k.$$

Всего 2^m критериев. Пусть

$$X = \{x \in E^m | \sum_{k=1}^{m} x_k^2 \le 1\}.$$

Найдем $\Pi(X, W)$. Отметим, что каждый частный критерий $W_J(x)$ строго вогнут (докажите) и $\Pi(X, W) = S(X, W)$. Условие (2) зависит от α с точностью до положительного множителя. Поэтому на вектор α можно наложить условие нормировки: $\sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_k| = 1$. Возьмем сначала x^0 – внутреннюю точку множества X, то есть $\sum\limits_{k=1}^{m} (x_k^0)^2 < 1$. В этом случае $\mathcal{L}(x^0) = \{\alpha \in E^m | \sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_k| = 1\}$. Найдем градиент каждого частного критерия

$$\frac{W_J(x)}{x_k} = \frac{-x_k}{\sqrt{1 - \sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2}} \pm 1,$$

где $+1$, если $k \notin J$ и -1, если $k \in J$. Отсюда условие (2) запишется в виде

$$(\alpha, W'_J(x^0)) = \frac{-(x^0, \alpha)}{\sqrt{1 - \sum\limits_{k=1}^{m} (x_k^0)^2}} - \sum_{k \in J} \alpha_k + \sum_{k \notin J} \alpha_k > 0 \tag{2}$$

для всех $J \subset K$. Покажем, что эта система неравенств эквивалентна одному неравенству. Действительно, возьмем $J = \{k \mid \alpha_k \ge 0\}$. Тогда $-\sum\limits_{k \in J}^{m} \alpha_k + \sum\limits_{k \notin J}^{m} \alpha_k = -\sum\limits_{k \in J}^{m} |\alpha_k| = -1$ – наименьшее значение суммы. Отсюда из (2)

$$\frac{-(x^0, \alpha)}{\sqrt{1 - \sum\limits_{k=1}^{m} (x_k^0)^2}} - 1 > 0.$$

Это одно из неравенств в (2). Но все остальные следуют из него. Итак, $x^0 \notin S(X, W) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathcal{L}(x^0) : -(x^0, \alpha) > \sqrt{1 - \sum\limits_{k=1}^{m} (x_k^0)^2} \Leftrightarrow \max\limits_{\alpha \in \mathcal{L}(x^0)} [-(x^0, \alpha)] > \sqrt{1 - \sum\limits_{k=1}^{m} (x_k^0)^2}$.

Найдем максимум, стоящий в левой части последнего неравенства. Имеем

$$-(x^0, \alpha) \le \max_{1 \le j \le m} |x_j^0| \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| = \max_{1 \le j \le m} |x_j^0| = |x_l^0|,$$

где равенство достигается при $\alpha = (0, ..., \underbrace{+1}_{l}, ...0)$. Получили $\max\limits_{\alpha \in \mathcal{L}(x^0)} [-(x^0, \alpha)] = \max\limits_{1 \le j \le m} |x_j^0|$. Итак,

$$x^0 \notin S(X, W) \Leftrightarrow \max_{1 \le j \le m} |x_j^0| > \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{m} (x_k^0)^2}.$$

Отсюда

$$x^0 \in S(X, W) \Leftrightarrow \max_{1 \le j \le m} |x_j^0| \le \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{m} (x_k^0)^2}.$$

Это неравенство и задает множество $S(X, W) = \Pi(X, W)$ внутри X.

Если x^0 принадлежит границе множества X, то есть $\sum\limits_{k=1}^{m} (x_k^0)^2 = 1$, то точка не будет оптимальной по Парето, так как малое смещение от x^0 вдоль радиуса приведет к резкому возрастанию корня $\sqrt{1 - \sum\limits_{k=1}^{m} (x_k)^2}$.

Пусть $m = 2$. Тогда $\Pi(X, W)$ задается двумя неравенствами

$$\left(x_1^0\right)^2 \le 1 - \left(x_1^0\right)^2 - \left(x_2^0\right)^2, \;\; \left(x_2^0\right)^2 \le 1 - \left(x_1^0\right)^2 - \left(x_2^0\right)^2$$

и представляет собой пересечение двух эллипсов.

Рассмотрим теперь общую задачу принятия решений. Пусть X – множество стратегий.

Определение. Бинарным отношением R на множестве X называется подмножество $R \subset X \times X$.

Бинарное отношение R здесь интерпретируется следующим образом: если $(x, x') \in R$, то для ЛПР стратегия x лучше стратегии x' (или не хуже, чем x'). Вместо $(x, x') \in R$ обычно используют более простую запись xRx'. Если $(x, x') \notin R$, то будем писать $x\overline{R}x'$.

Бинарное отношение называется:

а) рефлексивным, если $xRx \; \forall x \in X$;

б) антирефлексивным, если $xRx \;\; \forall x \in X$;

в) симметричным, если $xRy \Rightarrow yRx \;\; \forall x, y \in X$;

г) асимметричным, если $xRy \Rightarrow y\overline{R}x \;\; \forall x, y \in X$;

д) транзитивным, если $xRy, yRz \Rightarrow xRz \;\; \forall x, y, z \in X$;

г) ацикличным, если $\nexists x^1, ..., x^k \in X : x^1Rx^2R...Rx^kRx^1$.

Рассмотрим примеры. R – бинарное отношение сравнения стратегий по векторному критерию в нестрогом смысле (по Парето) или в строгом смысле (по Слейтеру). Это транзитивные, асимметричные отношения.

Упражнение. Докажите, что антирефлексивное транзитивное бинарное отношение ациклично.

Определение. Множество

$$C(X,R) = \{x' \in X \mid xRx' \Rightarrow x'Rx\} \tag{1}$$

называется *ядром* бинарного отношения R.

По смыслу если $x' \in C(X,R)$ и x не хуже, чем x', то и x' не хуже, чем x.

Если бинарное отношение R асимметрично, то ядру можно дать эквивалентное, более удобное определение:

$$C(X,R) = \{x' \in X \mid \nexists\, x \in X : xRx'\}. \tag{2}$$

Докажем, что в этом случае множества (1) и (2) совпадают. Пусть $x' \in (1)$. Докажем, что $x' \in (2)$. Действительно, если $\exists\, x \in X : xRx'$, то по свойству асимметричности $x'\overline{R}x$, что противоречит определению (1). Обратно, пусть $x' \in (2)$, докажем, что $x' \in (1)$. Но это очевидно, поскольку $\nexists\, x \in X : xRx'$ и нет посылки для импликации из (1).

Для отношений сравнения по Парето и Слейтеру соответствующими ядрами являются множества $\Pi(X,W)$ и $S(X,W)$.

Упражнение. Пусть X – конечное множество, а бинарное отношение R ациклично. Докажите, что ядро $C(X,R)$ не пусто.

Пример. Пусть $X = \{x^1, x^2, x^3\}$, а бинарное отношение задано ориентированным графом:

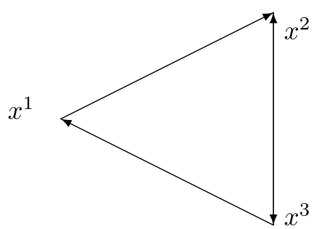


Рис. 11.4

Здесь отношение R не является асимметричным, так как $x^2Rx^3Rx^2$. Поэтому используем первое определение ядра: $C(X,R) = \{x^3\}$. Если бы мы использовали второе определение, то ядро оказалось бы пустым.

В качестве приложения общей задачи принятия решений поставим задачу сокращения множества оптимальных по Парето стратегий $\Pi(X,W)$ на основе экспертной информации. Подход был предложен В.В.Подиновским.

Начнем с примера. Ученики x^1 и x^2 имеют следующие оценки по двум предметам (критериям), математике и литературе:

	м	л
x^1	3	5
x^2	5	4

. Ученики не сравнимы по векторному критерию. Однако, сравнение возможно, если есть экспертная информация о сравнительной важности или равноценности критериев. Если предметы равноценны, то ученик x^2 учится одинаково с гипотетическим учеником $x^3 \mid 4 \mid 5 \mid$, который учится лучше ученика x^1.

Поэтому ученик x^2 учится лучше, чем x^1. Пусть математика важнее литературы. Тогда x^2 учится лучше x^3, так как по более важному предмету у x^2 пятерка. Следовательно, по транзитивности x^2 учится лучше, чем x^1. Если литература важнее математики, то ученик x^3 учится лучше x^2, но x^1 и x^2 не сравнимы, поскольку x^1 имеет пятерку по более важному предмету.

Теперь проведем необходимую формализацию. Будем говорить, что частные критерии $W_i(x)$ и $W_j(x)$ однородны, если $\max\limits_{x \in X} W_i(x) = \max\limits_{x \in X} W_j(x)$ и $\min\limits_{x \in X} W_i(x) = \min\limits_{x \in X} W_j(x)$, то есть критерии $W_i(x)$ и $W_j(x)$ имеют одинаковые диапазоны изменения.

Если критерии $W_i(x)$ и $W_j(x)$ не являются однородными и не являются константами, то их можно сделать однородными, заменив критерий $W_j(x)$ на критерий $\alpha W_j(x) + \beta$, где $\alpha > 0$ и β соответствующим образом подобранные константы.

Упражнение. Найдите явные выражения для констант α и β.

В дальнейшем будем считать, что в векторном критерии $W(x)$ все частные критерии попарно однородны.

Пусть $I = \{1, ..., s\}$ – множество номеров критериев. Информация от ЛПР о сравнительной важности или равноценности критериев задана множествами $A_1, A_2 \subset I \times I$. Здесь A_1 – множество пар (r, t) номеров равноценных критериев, A_2 – множество таких пар (r, t), что критерий $W_r(x)$ важнее критерия $W_t(x)$. A_1 и A_2 можно рассматривать как бинарные отношения на $I : A_1$ – отношение равноценности критериев, а A_2 – отношение их строгого предпочтения. Естественно предположить, что отношение A_1 симметрично и транзитивно, отношение A_2 асимметрично и транзитивно. Информация, выраженная в бинарных отношениях A_1 и A_2, должна быть непротиворечивой в том смысле, что нельзя построить цепочку вида $rB_1tB_2...B_kr$, где $B_i = A_1$ или A_2 и не для всех i $B_i = A_1$. Например, если информация непротиворечива, то нельзя построить цепочку вида $1A_12A_23A_11$.

Непротиворечивость экспертной информации можно задать следующим способом. Определим на множестве I бинарное отношение: $r\Phi t$ выполнено только в том случае, когда существует цепочка $i_0B_1i_1B_2....B_ki_k$, где $i_0 = r,\ i_k = t$, а каждое бинарное отношение $B_l,\ l = 1, ..., k$, равно либо A_1, либо A_2 и среди них есть по крайней одно отношение A_2. Нетрудно видеть, что бинарное отношение Φ транзитивно. Непротиворечивость информации состоит в том, что бинарное отношение Φ антирефлексивно.

В евклидовом пространстве E^s векторных оценок $y = W(x)$ определим следующие бинарные отношения.

Отношение Парето –

$$P = \{(y, y') \in E^s \times E^s \mid y_i \geq y'_i,\ i = 1, ..., s,\ y \neq y'\}.$$

Для пары $(r, t), r \neq t$ и вектора y введем вектор y^{rt}, полученный из y перестановкой r-й и t-й компонент.

Пусть rA_1t. Определим бинарное отношение S_{rt} на $E^s : yS_{rt}z \Leftrightarrow z = y^{rt}$. Если критерии W_r и W_t равноценны для ЛПР, то и векторные оценки y и z равноценны для него при $yS_{rt}z$.

Пусть rA_2t. Определим бинарное отношение $T_{rt} : yT_{rt}z \Leftrightarrow z = y^{rt},\ y_r > y_t$. По смыслу если r-й критерий предпочтительней t-го, то оценка y предпочтительней для ЛПР оценки z, поскольку по более предпочтительному критерию значение больше в оценке y.

Определим, наконец, результирующее бинарное отношение $R : yRy'$, если существует такая последовательность $z^0, z^1, ..., z^k$, что $y = z^0,\ y' = z^k$ и $z^0H_0z^1H_1 \dots H_{k-1}z^k$, где бинарные отношения $H_i \in \{P,\ S_{rt} : rA_1t,\ T_{rt} : rA_2t\}$ и при этом не все $H_l = S_{rt}$. В этом случае будем говорить, что последовательность $z^0, z^1, ..., z^k$ связывает векторные оценки y и y'

Лемма 1. Бинарное отношение R – транзитивное и ацикличное.

Доказательство. Транзитивность отношения R очевидна: если yRy' и $y'Ry''$, то последовательности векторных оценок, связывающие бинарными отношениями y с y' и y' с y'' следует объединить. Отсюда следует, что yRy''.

Докажем ацикличность отношения R. Предположим, что существует такая последовательность векторных оценок $y^1, ..., y^k$, что $yRy^1R...Ry^kRy$. Из транзитивности отношения R вытекает, что yRy. Поэтому существует следующая цепочка связанных бинарными отношениями векторных оценок: $yH_1z^1H_1 \dots H_{k-1}z^{k-1}H_ky$. Если среди отношений H_l встречается отношение P, то получим противоречие, так как сумма компонент векторов вдоль цепочки либо не меняется (при $H_l = S_{rt}$ или $H_l = T_{rt}$), либо убывает (при $H_l = P$). Пусть отношение P в цепочке не встречается. Тогда вдоль цепочки векторы получаются перестановкой компонент и обязательно встретится отношение T_{rt}. Без потери общности можно считать, что $H_1 = T_{rt}$. Далее, $H_l = T_{i_lj_l}$ или $H_l = S_{i_lj_l}$ при $l = 2, .., k$. Тогда $y_r > y_t$ и $rA_2t, i_2A_1(A_2)j_2, ..., i_kA_1(A_2)j_k$.

Введем множество $I_+ = \{i \in I \mid i\Phi t\}$. По смыслу в множество I_+ входят номера критериев, более важных, чем t-й критерий. Нетрудно видеть, что $r \in I_+,\ t \notin I_+$. Действительно, из rA_2t следует, что $r\Phi t$, а $t\overline{\Phi}t$ вытекает из антирефлексивности бинарного отношения Φ.

Возьмем любую пару $(i_l, j_l),\ l = 2, ..., k$. Если $j_l \in I_+$, то $i_l \in I_+$, поскольку из $i_lA_1(A_2)j_l\Phi t$ следует, что $i_l\Phi t$. Поэтому для пары (i_l, j_l) возможны только следующие случаи:

1) $i_l, j_l \in I_+$;
2) $i_l, j_l \notin I_+$;
3) $i_l \in I_+,\ j_l \notin I_+$.

В первых двух случаях $\sum\limits_{i\in I_+} z_i^{l-1} = \sum\limits_{i\in I_+} z_i^l$, поскольку вектор z^l получен из вектора z^{l-1} перестановкой i_l-й и j_l-й компонент.

Покажем, что в третьем случае необходимо выполнено $i_lA_2j_l$. Действительно, если $i_lA_1j_l$, то из симметричности отношения A_1 следует, что $j_lA_1i_l\Phi t \Rightarrow j_l\Phi t \Rightarrow j_l \in I_+$, что противоречит выбору $j_l \notin I_+$. Но $i_lA_2j_l$ означает, что $z^{l-1}T_{i_lj_l}z^l$. Отсюда получаем неравенство

$$\sum_{i\in I_+} z_i^{l-1} > \sum_{i\in I_+} z_i^l.$$

Следовательно,

$$\sum_{i\in I_+} y_i > \sum_{i\in I_+} z_i^1 \geq \sum_{i\in I_+} z_i^2 \geq ... \geq \sum_{i\in I_+} y_i$$

(противоречие). ■

Пусть $\Pi(X, W) = \{x^1, ..., x^m\}$ и $\Pi(Y) = \{y^i = W(x^i),\ i = 1, ..., m\}$ – соответствующие векторные оценки. Задачу сужения множества $\Pi(X, W)$ можно сформулировать так: требуется найти ядро $C(\Pi(Y), R)$ бинарного отношения R на множестве $\Pi(Y)$. Поскольку отношение R ациклично и транзитивно, а множество $\Pi(Y)$ конечно, то ядро $C(\Pi(Y), R)$ не пусто.

Основная задача здесь состоит в следующем. Для двух векторных оценок y и y' требуется выяснить, связаны ли они отношением R. В частных случаях эта задача решается несложно. Рассмотрим примеры.

1. Пусть все частные критерии равноценны, т.е. $A_1 = I \times I$, а $A_2 = \emptyset$. Чтобы сравнить векторные оценки y и y', нужно сначала упорядочить их компоненты, а потом сравнить их по Парето. Более формально, определим вектор $\theta(y) \in E^s$, образованный из компонент вектора y, расположенных в порядке убывания:

$$\theta_1(y) \geq \theta_2(y) \geq ... \geq \theta_s(y).$$

Здесь $\theta_1(y) = \min\limits_{1\leq i\leq s} y_i$ – наибольшая компонента вектора y, а $\theta_s(y) = \max\limits_{1\leq i\leq s} y_i$ – наименьшая.

Лемма 2. Если yPy', то $\theta(y)P\theta(y')$.

Доказательство. Рассуждения проведем методом математической индукции по размерности s векторного критерия. При $s = 1$ утверждение леммы очевидно. Пусть оно справедливо для всех векторных оценок размерности меньше s. Покажем, что утверждение леммы верно для векторных оценок из E^s.

По условию $y_i \geq y'_i,\ i = 1, ..., s$ и $y \neq y'$. Отсюда

$$\theta_1(y) = \max_{1\leq i\leq s} y_i = y_{i_0} \geq \theta_1(y') = \max_{1\leq i\leq s} y'_i = y_{j_0}.$$

Предположим, что $i_0 = j_0$, т.е. номера максимальных компонент векторов y и y' совпадают. Вычеркнем эти компоненты и получим векторы $\hat{y}\ \hat{y}'$ из E^{s-1}. Если $\hat{y} = \hat{y}'$, то $(\theta_2(y), ..., \theta_s(y)) = (\theta_2(y'), ..., \theta_s(y'))$ и отсюда $\theta_1(y) > \theta_1(y')$. Следовательно, $\theta(y)P\theta(y')$. Если $\hat{y}P\hat{y}'$, то по индукционному предположению $\theta(\hat{y})P\theta(\hat{y}')$. Учитывая, что $\theta_1(y) > \theta_1(y')$, получаем $\theta(y)P\theta(y')$.

Теперь предположим, что $i_0 \neq j_0$. Определим вектор $y'' = (y')^{i_0 j_0}$. Тогда

$$y_{i_0} \geq y'_{i_0} = y''_{j_0},\ \ y_{j_0} \geq y'_{j_0} = y''_{i_0}.$$

Отсюда

$$y_{j_0} \geq y'_{j_0} \geq y'_{i_0} = y''_{j_0},\ \ y_{i_0} \geq y'_{j_0} = y''_{i_0}.$$

Итак, $y_i \geq y''_i,\ i = 1, ..., s,\ y \neq y''$. Следовательно, yPy'' и $\theta_1(y) = y_{i_0},\ \theta_1(y'') = y'_{j_0} = y''_{i_0}$, т.е. номера максимальных компонент векторных оценок y и y'' совпадают. По доказанному выше $\theta(y)P\theta(y'') = \theta(y')$. ■

Утверждение. Если $A_1 = I \times I$, то yRy' выполнено тогда и только тогда, когда $\theta(y)P\theta(y')$.

Доказательство. Пусть yRy'. Тогда существует такая последовательность векторных оценок $z^0, z^1, ..., z^k$, что $y = z^0,\ y' = z^k$ и $z^0 H_0 z^1 H_1 \dots H_{k-1} z^k$, где бинарные отношения $H_i \in \{P,\ S_{rt} : rA_1t\}$ и при этом найдется такое s, при котором $H_s = P$. Из леммы 2 следует, что $\theta(z^{s-1})P\theta(z^s)$. Для $l \neq s$ либо $\theta(z^{l-1})P\theta(z^l)$, либо $\theta(z^{l-1}) = \theta(z^l)$. Отсюда $\theta(y)P\theta(y')$.

Пусть $\theta(y)P\theta(y')$. Тогда найдется последовательность вида

$$yH_1z^1H_2...H_{s-1}\theta(y)P\theta(y')H_{s+1}z^{s+1}...H_ky,$$

где $H_l \in \{S_{rt} \mid rA_1t\},\ l \neq s$. Отсюда yRy'. ■

Рассмотрим конкретный пример. Пусть $s = 3$, а $\Pi(X, W) = \{x^1, x^2, ..., x^5\}$. Соответствующие векторные оценки указаны в таблице

y^1	3	5	3
y^2	4	4	3
y^3	5	3	2
y^4	2	3	5
y^5	4	2	4

Здесь $y^1Ry^3,\ \ y^1Ry^4,\ \ y^2Ry^5,\ \ \ \theta(y^1)$ и $\theta(y^2)$ не сравнимы по P. Поэтому $C((Y), R) = \{y^1, y^2\}$ и остаются две оптимальные по Парето стратегии x^1 и x^2.

2. Пусть $(X, W) = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$ - ученики с оценками по четырем предметам, $A_1 = \{(1, 3)\},\ A_2 = \{(2, 4), (2, 3)\}$.

y^1	5	5	4	4
y^2	5	4	5	4
y^3	5	4	4	5
y^4	4	4	5	5

Здесь $y^1T_{24}y^3,\ y^1T_{23}y^2,\ y^1T_{24}y^3S_{13}y^4 \Rightarrow C(\Pi(Y), R) = \{y^1\}$ и остается единственный наилучший ученик x^1.

Рассмотрим пример использования бинарных отношений в задаче проектирования управляемых динамических объектов.

Динамический объект задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = f(z, u, x),\ z(t_0) = z^0, \tag{1}$$

где $z \in Z(x) = \{z \in E^m \mid g_j(z) \leq w_j(x),\ j = 1, ..., l\}$ – вектор фазовых переменных, $x \in X$ – вектор конструктивных параметров (стратегия ЛПР) и $u \in U$ – управление.

К такому классу объектов относятся летательный аппарат, робот-манипулятор, электрическая цепь и т.п. Возникает вопрос, как сравнить два варианта x и x' конструкций динамической системы?

Пусть H – множество в E^m. Обозначим через conv$H$ выпуклую оболочку множества H, т. е. пересечение всех выпуклых множеств из E^m, содержащих множество H. Выпуклая оболочка conv$H$ представляет собой совокупность всевозможных выпуклых комбинаций вида $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j z^j$, где

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0,\ z^j \in H,\ j = 1, ..., k.$$

Справедливо следующее утверждение: выпуклая оболочка компакта в E^m является выпуклым компактом.

Рассмотрим множество

$$G(x,z) = \mathrm{conv} f(z,U,x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{conv}\{f \in E^m \mid f = f(z,u,x),\ u \in U\}$$

– выпуклую оболочку *векторограммы* $f(z,U,x)$ правой части системы (1). В дальнейшем предполагается, что функция $f(z,u,x)$ непрерывна, а U – компакт евклидова пространства. Тогда векторограмма $f(z,U,x)$ – компакт, а $G(x,z)$ – выпуклый компакт в E^m.

Определим бинарное отношение

$$xRx' \Leftrightarrow G(x,z) \supset G(x',z),\ \forall\ z \in Z(x') \subset Z(x'). \qquad (2)$$

Интуитивно ясно, что объект x обладает бо́льшими динамическими возможностями, чем объект x'. Это означает, что управляя объектом x, можно получить более широкое множество траекторий, чем управляя объектом x'.[1]

Нетрудно видеть, что бинарное отношение R транзитивно и можно решать задачу поиска ядра $C(X,R)$.

Запишем бинарное отношение R в эквивалентном виде. Пусть $S = \{s \in E^m \mid |s| = 1\}$ – единичная сфера в E^m. Определим на S опорную функцию множества $G(x,z)$:

$$\delta(s,x,z) = \max_{f \in G(x,z)} (f,s).$$

Отметим характерное свойство опорных функций:

$$G(x,z) \supset G(x',z) \Leftrightarrow \delta(s,x,z) \geq \delta(s,x',z)\ \forall\ s \in S.$$

Импликация $\Rightarrow$ очевидна. Импликация $\Leftarrow$ доказывается с помощью теоремы об отделяющей гиперплоскости.

[1] Этот факт строго формулируется и обосновывается в книге Н.Н.Красовского и А.И.Субботина "Позиционные дифференциальные игры". – М.: Наука, 1974.

Сделаем следующее предположение:

$$Z(x') \subset Z(x) \Leftrightarrow w_j(x) \geq w_j(x'),\ j = 1, ..., l.$$

Тогда (2) можно записать в виде

$$\begin{cases} \delta(s,x,z) \geq \delta(s,x',z),\ \forall\ s \in S,\ \forall z \in Z(x'), \\ w_j(x') \geq w_j(x),\ j = 1, ..., l. \end{cases} \tag{3}$$

Первая группа неравенств эквивалентна включению $G(x,z) \subset G(x',z)$, а вторая – включению $Z(x') \subset Z(x)$. Заметим, что первую группу неравенств можно записать в виде

$$\Delta(x,x',z) = \min_{s \in S}(\delta(s,x,z) - \delta(s,x',z)) \geq 0\ \forall\ z \in Z(x').$$

Пример. Рассмотрим систему

$$\dot{z}^1 = z^2,\ \dot{z}^2 = Pu - kz^2,\ z^1, z^2 \in E^3,\ u \in U = \{u \in E^3 \mid |u| \leq 1\}.$$

Это уравнения движения точечного объекта, z^1 – пространственные координаты, z^2 – скорость. Вторая группа уравнений – уравнения сил. Здесь P – тяга, u – вектор, задающий величину и направление вектора, k – коэффициент сопротивления. Положим

$$x = (k,P) \in X = \{x \mid \underline{k} \leq k \leq \overline{k},\ \underline{P} \leq P \leq \overline{P}\}.$$

Отметим, что скорость движения объекта ограничена. Максимальная скорость достигается при $\dot{z}^2 = 0$, т.е.

$$Pu - kz^2 = 0 \Rightarrow z^2 = \frac{Pu}{k},\ |z^2| = \frac{P|u|}{k} \leq \frac{P}{k}.$$

Итак,

$$Z(x) = \left\{ z = (z^1, z^2) \mid |z^2| \leq w_1(x) = \frac{P}{k} \right\}.$$

Теперь построим бинарное отношение R. Положим $f = (f^1, f^2)$, где $f^1 = z^2,\ f^2 = Pu - kz^2$. Отметим, что при нахождении выпуклой оболочки $G(x,z)$ достаточно ее построить для вектора $f^2 = Pu - kz^2$, поскольку компонента $f^1 = z^2$ от переменных u и x не зависит. Поэтому возьмем $S = \{s \in E^3 \mid |s| = 1\}$,

$$\delta(s,z,x) = \max_{u:|u| \leq 1}(f^2, s) = \max_{u:|u| \leq 1}(Pu - kz^2, s) = P - k(z^2, s).$$

Аналогично для стратегии $x' = (k', P')$ $\delta(s,z,x) = P' - k'(z^2, s)$. Отсюда

$$\Delta(x,x',z) = \min_{s \in S}(P - P' + (k' - k))(z^2, s) = P - P' - |k' - k||z^2|.$$

Запишем неравенства (3), задающие бинарное отношение $R : xRx' \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} P - P' - |k' - k||z^2| \geq 0 \; \forall \, z : |z^2| \leq \dfrac{P'}{k'}, \\ \dfrac{P}{k} \geq \dfrac{P'}{k'} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} P - P' - |k' - k|\dfrac{P'}{k'} \geq 0 \; , \\ \dfrac{P}{k} \geq \dfrac{P'}{k'}. \end{cases} \tag{3}$$

Найдем $C(X, R) = \{x' \in X \mid xRx' \Rightarrow x'Rx\}$. Докажем, что $C(X, R) = \{x' \in X \mid P' = \overline{P}\}$.

Пусть $x' \in X$ и $P' < \overline{P}$. Положим $x = (k', P'+\varepsilon)$. При малом $\varepsilon > 0 \quad xRx'$, но $x'\overline{R}x \Rightarrow x' \notin C(X, R)$. Пусть $x' = (k', \overline{P})$. Покажем, что $x' \in C(X, R)$. Пусть xRx'. Тогда из (3) получаем

$$P - P' - |k' - k|\frac{P'}{k'} \geq 0 \Rightarrow P = P', k = k',$$

т.е. из xRx' следует $x = x'$. Поэтому $x'Rx$ и $x' \in C(X, R)$.

Можно доказать, что построенное в данном примере бинарное отношение R невозможно представить никаким векторным критерием.

§12. Математическая модель операции

В этом и следующем параграфах излагается подход Ю.Б. Гермейера к построению и исследованию математических моделей *операций.* Здесь сохранены обозначения, использованные в книге Ю.Б. Гермейера.

Операция – это совокупность мероприятий, направленных на достижение некоторой цели. Совокупность лиц (или одно лицо), стремящихся в операции к поставленной цели называется *оперирующей стороной.* В операции могут участвовать другие лица, например противники, преследующие собственные цели, не совпадающие с целью оперирующей стороны. Внутри оперирующей стороны выделяется лицо, называемое *исследователем операции.* Исследователь операции преследует ту же цель, что и оперирующая сторона. Однако, он не принимает окончательных решений. Его задача состоит в формировании и изучении математической модели операции и выработке рекомендаций по выбору способов действий (стратегий).

Оперирующая сторона для достижения цели операции использует *активные средства (ресурсы).* В качестве ресурсов могут выступать деньги, сырье, запасы продукции и т.п.

Контролируемые факторы – это величины, выбор значений которых определяет действие оперирующей стороны в рассматриваемой операции. Обычно имеется вектор контролируемых факторов $x \in \overline{M}_0$. Здесь $\overline{M}_0$ – множество всевозможных значений, которые вектор x может принимать в процессе проведения операции. Выбор оперирующей стороной контролируемых факторов обычно осуществляется во времени. При этом поступающая информация об обстановке, в которой происходит операция, может существенно расширять возможности выбора контролируемых факторов. Если вообще никакой информации не поступает или поступающая информация не учитывается, то оперирующая сторона может выбрать и реализовать любой вектор $x \in M_0 \subseteq \overline{M}_0$. Векторы $x \in M_0$ будем называть стратегиями-константами. Рассмотрим примеры.

В модели "нападение-оборона" вектор контролируемых факторов x принадлежит множеству

$$M_0 = \overline{M}_0 = \{x \in E^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = A,\ x_i \geq 0,\ i = 1, ..., n\}$$

и представляет собой распределение средств нападения по пунктам возможного прорыва.

В многошаговой антагонистической игре с полной информацией первый игрок выбирает значения контролируемых факторов $x_t,\ t = 1, ..., T$, в течение T шагов. При этом выбор альтернативы $x_t \in U_t(\overline{x}_{t-1}, \overline{y}_{t-1})$ зависит от предыстории игры $\overline{x}_{t-1}, \overline{y}_{t-1})$, т.е. от выборов обоих игроков на предыдущих шагах. Здесь $\overline{M}_0$ состоит из всевозможных значений, которые может принимать вектор $\overline{x}_T = (x_1, ..., x_T)$. Выбор стратегий-констант в многошаговой игре с полной информацией весьма ограничен. Например, невозможно играть в шахматы, не зная ходы противника. Однако, если ограничиться играми, в которых множество U_t зависит только от момента времени t, но не от предыстории игры, то в этом случае $\overline{M}_0 = M_0 = \prod\limits_{t=1}^{T} U_t$.

Неконтролируемые факторы это величины, влияющие на исход операции, но выбор значений которых не находится в распоряжении оперирующей стороны. Неконтролируемые факторы делятся на *неопределенные* и *случайные.* Неопределенные факторы это такие неконтролируемые факторы, для которых известна лишь область их возможных значений. Пусть y – вектор неопределенных факторов, $y \in N_0$, где N_0 – множество всех возможных значений для y. Однако, оперирующая сторона обычно предполагает, что вектор y принадлежит некоторой *области неопределенности* $N \subset N_0$. Например, при анализе шахматной партии можно исключить заведомо глупые ходы противника. Риск, связанный с предположением $y \in N$ должна взять на себя оперирующая сторона. Неопределенные факторы делятся на следующие:

а) контролируемые факторы противника (его стратегии),

б) природные непределенности,

в) факторы, характеризующие неясность цели оперирующей стороны.

Приведем пример последних. Пусть частные критерии $W_i(x),\ i = 1, ..., s$ располагаются в порядке не возрастания важности и в свертке $F_1(x, \lambda) = \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i W_i(x)$ оперирующая сторона не решается выбрать $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_s) \in \Lambda = \{\lambda \mid \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i = 1,\ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq .... \geq \lambda_s \geq 0\}$. Тогда $\lambda \in \Lambda = N$ можно рассматривать как неопределенный фактор, характеризующий неясность цели оперирующей стороны.

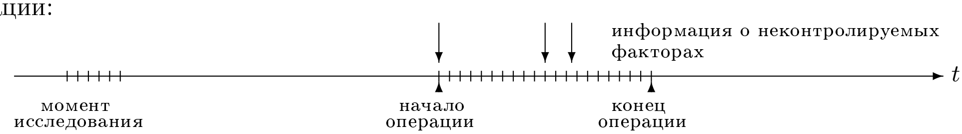
Случайные факторы это случайные величины, влияющие на исход операции. Вектор случайных факторов обозначим через $z \in Z$. Пусть θ – закон распределения для z. Он может быть точно не известен, а известно лишь, что $\theta \in \Theta$. Множества Θ встречаются двух основных видов:

1) $\Theta = \{\theta_\alpha,\ \alpha \in \mathcal{L}\}$. Здесь тип закона распределения известен (нормальный, экспоненциальный и т.п.), но параметр α, определяющий конкретный закон, точно не известен.

2) $\Theta = \{\theta_\alpha \mid \underline{a}_i \leq \int\limits_Z a_i(z)d\theta(z) \leq \overline{a}_i,\ i = 1, ..., l\}$. Тип закона распределения неизвестен, но известны ограничения на его интегральные характеристики. Например, если $z \in E^1,\ a_i(z) = z^i$, то Θ задает ограничения на моменты случайной величины z.

Критерий эффективности. Исход операции будем отождествлять с тройкой $(x, y, z) \in \overline{M}_0 \times N \times Z$. Степень соответствия исхода операции поставленной цели задают с помощью критерия эффективности $F(x, y, z)$ – функции, определенной на $\overline{M}_0 \times N \times Z$. Критерий эффективности математически задает цель операции. Будем считать, что оперирующая заинтересована в увеличении значения $F(x, y, z)$. Пример критерия эффективности – функция выигрыша $F(x, y)$ первого игрока в антагонистической игре.

Стратегия. Модель операции исследуется до ее проведения. Будем условно говорить о *моменте исследования,* предшествующем началу операции:



Во время проведения операции поступает информация о неконтролируемых факторах. *Информационная гипотеза* – это точное описание поступления этой информации.

Стратегия это выбор значений контролируемых факторов в зависимости от поступающей информации о неконтролируемых факторах. Математически стратегия задается функцией $\tilde{x} : N \times Z \to \overline{M}_0$. Пусть M – множество стратегий, отвечающих информационной гипотезе. Стратегия выбирается до начала операции в момент исследования.

Примеры.

1. Пусть не ожидается никакой информации о неконтролируемых факторах. Тогда $M = M_0$ – множество *стратегий-констант* $\tilde{x} = x$.

2. Пусть в начале операции будут точно известно значение y. Тогда $M = M_{\text{И}}$ – множество всех функций вида $\tilde{x} : N \to \overline{M}_0$.

3. Пусть в начале операции будут точно известны значения y и z. Тогда $M = \tilde{M}$ – множество всех функций вида $\tilde{x} : N \times Z \to M_0$.

4. Пусть $\overline{M}_0 = M_0$, $y = (y_1, ..., y_n)$, а случайные факторы отсутствуют.

Предположим, что в начале операции поступит информация о $\sum_{j=1}^{n} y_j$. Тогда M – множество функций вида $f(\sum_{j=1}^{n} y_j)$. Здесь $M_0 \subset M \subset M_{\text{И}}$ и оба включения – строгие.

Окончательно модель операции задается набором объектов:

$$F(x, y, z),\ x \in \overline{M}_0,\ y \in N \subset N_0,\ z \in Z,\ \theta \in \Theta,\ \tilde{x} \in M.$$

§13. Оптимальные стратегии в операции.

Как сравнивать стратегии? Какие стратегии в операции следует считать оптимальными? Подход Ю.Б.Гермейера состоит в следующем. Сначала для каждой стратегии $\tilde{x} \in M$ определяется *оценка эффективности* $W(\tilde{x})$ на основе принципа *гарантированного результата.* По смыслу $W(\tilde{x})$ – некоторая гарантированная величина критерия.

Пример. В игре Γ_1

$$W(x) = \min_{y \in Y(x)} F(x, y),$$

где $Y(x) = \operatorname{Arg}\max_{y \in Y} G(x, y) = N$. Отметим, что принцип гарантированного результата не исключает элементы риска. В данном примере риск для первого игрока состоит в предположении, что второй игрок максимизирует свою функцию выигрыша $G(x, y)$ при известном x.

Определение. Стратегия $\tilde{x}^0 \in M$ называется *оптимальной,* если $W(\tilde{x}^0) = \max_{\tilde{x} \in M} W(\tilde{x}) \stackrel{\text{def}}{=} F_\Gamma(M)$. Последняя величина называется *наилучшим гарантированным результатом.*

Выведем формулу для оценки эффективности стратегии. Сделаем следующие предположения. Пусть y – либо природная неопределенность, либо стратегия противника, не знающего реализации случайной величины z. Интересы противника либо противоположны интересам оперирующей стороны, либо не известны. Оперирующая сторона разрешает осреднение критерия по случайностям, т.е. использование осредненного критерия

$$\overline{F}(\tilde{x}, y, \theta) \stackrel{def}{=} \int_Z F(\tilde{x}(y, z), y, z) d\theta(z).$$

Тогда оценка эффективности имеет вид

$$W(\tilde{x}) = \inf_{y \in N} \inf_{\theta \in \Theta} \int_Z F(\tilde{x}(y, z), y, z) d\theta(z) = \inf_{y \in N} \inf_{\theta \in \Theta} \overline{F}(\tilde{x}, y, \theta). \qquad (1)$$

Итак, сначала производится осреднение критерия эффективности $F(\tilde{x}(y, z), y, z)$ по θ, а потом берется нижняя грань по оставшимся неопределенностям y и

θ. Это пример использования принципа гарантированного результата. Отметим, что если бы противник знал реализацию случайной величины z, то формула для оценки эффективности была бы другой:

$$W'(\tilde{x}) = \inf_{\theta \in \Theta} \int\limits_Z \inf_{y \in N} F(\tilde{x}(y,z), y, z) d\theta(z).$$

Действительно, в худшем случае противник знает стратегию $\tilde{x}$ и в состоянии найти $\inf\limits_{y \in N} F(\tilde{x}(y,z), y, z)$ при известном ему z.

Покажем, что

$$W(\tilde{x}) \geq W'(\tilde{x}).$$

Для $\forall \theta \in \Theta$ и $\forall y \in N$

$$\int\limits_Z F(\tilde{x}(y,z), y, z) d\theta(z) \geq \int\limits_Z \inf_{y \in N} F(\tilde{x}(y,z), y, z) d\theta(z)$$

Отсюда

$$\inf_{y \in N} \int\limits_Z F(\tilde{x}(y,z), y, z) d\theta(z) \geq \int\limits_Z \inf_{y \in N} F(\tilde{x}(y,z), y, z) d\theta(z)$$

Взяв $\inf\limits_{\theta \in \Theta}$ от левой и правой части, получим неравенство

$$W(\tilde{x}) \geq W'(\tilde{x}).$$

Отметим, что это неравенство отражает возросшую информированность противника.

Перейдем к использованию смешанных стратегий. Предположим, что не ожидается никакой информации о неконтролируемых факторах. В этом случае оперирующая сторона использует стратегии-константы $\tilde{x} = x \in M = M_0$. Если наилучший гарантированный результат $F_\Gamma(M_0)$ ее не устраивает, то можно использовать смешанные стратегии. Напомним, что смешанная стратегия φ есть вероятностное распределение на M_0. Определим условия применения смешанной стратегии. К сформулированным выше предположениям добавим еще одно: противник не должен знать реализации $x \in M_0$. Тогда оценка эффективности смешанной стратегии φ имеет вид

$$W(\varphi) = \inf_{y \in N} \inf_{\theta \in \Theta} \int\limits_Z \int\limits_{M_0} F(x, y, z) d\varphi(x) d\theta(z). \tag{2}$$

Если бы противник знал реализацию z, то формула была бы другой

$$W'(\varphi) = \inf_{\theta \in \Theta} \int\limits_Z \inf_{y \in N} \int\limits_{M_0} F(x, y, z) d\varphi(x) d\theta(z).$$

Величина $F_c = \sup\limits_{\varphi\in\{\varphi\}} W(\varphi)$ является наилучшим гарантированным результатом в смешанных стратегиях.

Вернемся к определению оптимальной стратегии $\tilde{x}^0 : W(\tilde{x}^0) = \max\limits_{\tilde{x}\in M} W(\tilde{x}) = F_\Gamma(M)$. Если последний максимум не достигается, то используют понятие ε-оптимальной стратегии.

Определение. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Стратегия $\tilde{x}^\varepsilon \in M$ называется ε-оптимальной, если $W(\tilde{x}^\varepsilon) \geq \sup\limits_{\tilde{x}\in M} W(\tilde{x}) - \varepsilon$.

Задача поиска величины $F_\Gamma(M)$ непростая, поскольку она состоит в максимизации $W(\tilde{x})$ на множестве функций M. Эта задача упрощается, если во множестве стратегий M содержатся *абсолютно оптимальные стратегии.* До конца этого параграфа будем предполагать известным закон распределения случайных факторов θ.

Определение. Стратегия $\tilde{x}_a \in M$ называется абсолютно оптимальной, если

$$\overline{F}(\tilde{x}_a, y, \theta) = \max_{\tilde{x}\in M} \overline{F}(\tilde{x}, y, \theta) \ \forall \ y \in N.$$

Теорема 3.4. Пусть существует абсолютно оптимальная стратегия $\tilde{x}_a \in M$. Тогда $\tilde{x}_a$ – оптимальная стратегия и

$$F_\Gamma(M) = \inf_{y\in N} \max_{\tilde{x}\in M} \overline{F}(\tilde{x}, y, \theta).$$

Доказательство. Для любой стратегии $\tilde{x} \in M$ имеем

$$W(\tilde{x}) = \inf_{y\in N} \overline{F}(\tilde{x}, y, \theta) \leq \inf_{y\in N} \max_{\tilde{x}\in M} \overline{F}(\tilde{x}, y, \theta) =$$

$$= \inf_{y\in N} \overline{F}(\tilde{x}_a, y, \theta) = W(\tilde{x}_a).$$

■

Следствие. 1) Пусть для любых $y \in N$ достигается $\max\limits_{x\in\overline{M}_0} \overline{F}(x, y, \theta)$. Тогда

$$F_\text{И} \overset{def}{=} F_\Gamma(M_\text{И}) = \inf_{y\in N} \max_{x\in\overline{M}_0} \overline{F}(x, y, \theta).$$

2) Пусть для любых $y \in N,\ z \in Z$ достигается $\max\limits_{x\in\overline{M}_0} F(x, y, z)$. Тогда

$$\tilde{F} \overset{def}{=} F_\Gamma(\tilde{M}) = \inf_{y\in N} \int\limits_Z \max_{x\in\overline{M}_0} F(x, y, z) d\theta(z).$$

Замечание. Формулы для $F_\text{И}$ и $\tilde{F}$ не содержат символов оптимизации по множеству функций.

Доказательство. 1). Определим стратегию $\tilde{x}_a$ из следующего условия: $\tilde{x}_a(y) \in \operatorname{Arg} \max\limits_{x\in\overline{M}_0} \overline{F}(x, y, \theta)$ при любом $y \in N$. Стратегия $\tilde{x}_a$ содержится во множестве стратегий $M_И$. Покажем, что она абсолютно оптимальна. Действительно, для любой стратегии $\tilde{x} \in M_И$ и любом $y \in N$

$$\overline{F}(\tilde{x}, y, \theta) = \overline{F}(\tilde{x}(y), y, \theta) \leq \max_{x \in \overline{M}_0} \overline{F}(x, y, \theta)$$

и равенство здесь достигается на стратегии $\tilde{x}_a$. По теореме 3.4

$$F_И = \inf_{y \in N} \max_{\tilde{x} \in M} \overline{F}(\tilde{x}, y, \theta) = \inf_{y \in N} \max_{x \in \overline{M}_0} \overline{F}(x, y, \theta).$$

2) Определим стратегию $\tilde{x}_a$ из следующего условия:

$$\tilde{x}_a(y, z) \in \operatorname{Arg} \max_{x \in \overline{M}_0} F(x, y, z)$$

при любых $y \in N$, $z \in Z$. Стратегия $\tilde{x}_a$ содержится во множестве стратегий $\tilde{M}$. Покажем, что она абсолютно оптимальна. Действительно, для любых $\tilde{x} \in \tilde{M}$ и $y \in N$

$$\overline{F}(\tilde{x}, y, \theta) = \int\limits_Z F(\tilde{x}(y, z), y, z) d\theta(z) \leq \int\limits_Z \max_{x \in \overline{M}_0} F(x, y, z) d\theta(z) =$$

$$= \int\limits_Z F(\tilde{x}_a(y, z), y, z) d\theta(z) = \overline{F}(\tilde{x}_a, y, \theta).$$

По теореме 3.4

$$\tilde{F} = \inf_{y \in N} \max_{\tilde{x} \in \tilde{M}} \overline{F}(\tilde{x}, y, \theta) = \inf_{y \in N} \int\limits_Z \max_{x \in \overline{M}_0} F(x, y, z) d\theta(z).$$

■

Пусть для множества стратегий M при некотором $y \in N$ $\max\limits_{\tilde{x} \in M} \overline{F}(\tilde{x}, y, \theta)$ не достигается, но $\sup\limits_{\tilde{x} \in M} \overline{F}(\tilde{x}, y, \theta) < +\infty$. Тогда можно ввести понятие ε-абсолютно оптимальной стратегии.

Определение. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Стратегия $\tilde{x}_a^\varepsilon \in M$ называется ε-абсолютно оптимальной, если

$$\overline{F}(\tilde{x}_a^\varepsilon(y, z), y, \theta) \geq \sup_{\tilde{x} \in M} F(\tilde{x}, y, \theta) - \varepsilon, \ \forall\, y \in N.$$

Рассмотрим пример множества стратегий, не содержащих ε-абсолютно оптимальные стратегии.

Пример. Пусть $M = M_0 = \{1, 2\}$, $N = \{1, 2\}$, а z отсутствует. Критерий эффективности зададим матрицей

$$(F(i, j))_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ i \in M_0, \ j \in N.$$

Докажем, что при $0 \le \varepsilon < 2$ в M_0 не существует ε-абсолютно оптимальной стратегии. Возьмем $i = 1$. Тогда $F(1,1) = -1 < 1 - \varepsilon = F(2,1) - \varepsilon$, т.е. при $j = 2$ нарушается неравенство из определения ε-абсолютно оптимальной стратегии. Итак, доказано, что стратегия $i = 1$ не является ε-абсолютно оптимальной. Аналогично доказывается, что стратегия $i = 2$ также не ε-абсолютно оптимальна.

Теорема 3.4$'$. Пусть для всякого $\varepsilon > 0$ существует ε-абсолютно оптимальная стратегия $\tilde{x}_a^\varepsilon \in M$. Тогда стратегия $\tilde{x}_a^\varepsilon$ ε-оптимальна и

$$F_\Gamma(M) = \inf_{y \in N} \sup_{\tilde{x} \in M} \overline{F}(\tilde{x}, y, \theta).$$

Докажите самостоятельно.

Следствие. 1) Пусть для любых $y \in N$ величина $\sup\limits_{x \in \overline{M}_0} \overline{F}(x, y, \theta)$ конечная. Тогда

$$F_И \stackrel{def}{=} F_\Gamma(M_И) = \inf_{y \in N} \sup_{x \in \overline{M}_0} \overline{F}(x, y, \theta).$$

2) Пусть для любых $y \in N,\ z \in Z$ величина $\max\limits_{x \in \overline{M}_0} F(x, y, z)$ конечная. Тогда

$$\tilde{F} \stackrel{def}{=} F_\Gamma(\tilde{M}) = \inf_{y \in N} \int\limits_Z \sup_{x \in \overline{M}_0} F(x, y, z) d\theta(z).$$

Докажите самостоятельно.

Закончим параграф сравнением наилучших гарантированных результатов для четырех множеств стратегий : $M_0, \{\varphi\}, M_И$ и $\tilde{M}$. Положим $F_\Gamma^0 = F_\Gamma(M_0)$. Ранее ввели величины

$$F_c = \sup_{\varphi \in \{\varphi\}} W(\varphi),\ F_И = F_\Gamma(M_И),\ \tilde{F} = F_\Gamma(\tilde{M}).$$

Теорема 3.5. Предположим, что $M_0 = \overline{M}_0$. Тогда справедливы неравенства

$$F_\Gamma^0 \le F_c \le F_И \le \tilde{F}.$$

Предположим, что случайный фактор z отсутствует, M_0 и N – параллелепипеды евклидовых пространств, а критерий $F(x, y)$ непрерывен на $M_0 \times N$. Тогда, если F вогнут по x, то $F_\Gamma^0 = F_c$, а если F является выпуклым по y, то $F_c = F_И$.

Доказательство. Напомним, что закон распределения случайных факторов θ предполагается известным. Имеем

$$F_\Gamma^0 = \sup_{x \in M_0} \inf_{y \in N} \overline{F}(x, y, \theta) \le \sup_{\varphi \in \{\varphi\}} \inf_{y \in N} \int\limits_{M_0} \overline{F}(x, y, \theta) d\varphi(x) = F_c,$$

поскольку $M_0 \subset \{\varphi\}$. Далее, для любой смешанной стратегии $\varphi \in \{\varphi\}$

$$W(\varphi) = \inf_{y \in N} \int\limits_{M_0} \overline{F}(x, y, \theta) d\varphi(x) \leq \inf_{y \in N} \sup_{x \in M_0} \overline{F}(x, y, \theta) = F_{\text{И}}.$$

Отсюда $F_c \leq F_{\text{И}}$. Неравенство $F_{\text{И}} \leq \tilde{F}$ вытекает из включения множеств стратегий: $M_{\text{И}} \subset \tilde{M}$.

Пусть случайный фактор z отсутствует. Рассмотрим непрерывную игру $\Gamma = \Big\langle M_0, N, F(x,y) \Big\rangle$, в которой

$$F_{\Gamma}^0 = \underline{v} = \max_{x \in M_0} \min_{y \in N} F(x, y), \; F_c = \max_{\varphi \in \{\varphi\}} \min_{y \in N} \int\limits_{M_0} F(x, y) d\varphi(x) = v$$

– значение игры, $F_{\text{И}} = \overline{v} = \min\limits_{y \in N} \max\limits_{x \in M_0} F(x, y)$. Теперь все утверждения вытекают из теорем 1.14, 1.15. ■

Результатам доказанной теоремы можно придать информационный смысл. Величину $\text{Ц}_{\text{П}} = F_c - F_{\Gamma}^0$ можно рассматривать как ценность информации противника о значении x. Покажем, что если противник знает x, то оперирующая сторона обеспечивает себе результат F_{Γ}^0. Оценка эффективности любой смешанной стратегии φ

$$W(\varphi) = \int\limits_{M_0} \min_{y \in N} F(x, y) d\varphi(x)$$

не превосходит

$$\max_{x \in M_0} \min_{y \in N} F(x, y) = F_{\Gamma}^0.$$

Поэтому в этом случае применение смешанных стратегий не имеет смысла, а использование чистых стратегий позволяет получить F_{Γ}^0. Если, наоборот, реализация значения x противнику неизвестна, то оперирующая сторона может получить результат F_c. Если критерий $F(x, y)$ вогнут по x, то $\text{Ц}_{\text{П}} = 0$ и противнику не имеет смысла добиваться информации о x.

Аналогично величину $\text{Ц}_o = F_{\text{И}} - F_c$ можно рассматривать как ценность информации оперирующей стороны о значении y. Действительно, если информация о неопределенном факторе y ожидается, то оперирующая сторона получает результат $F_{\text{И}}$, а в противном случае – F_c. Если критерий $F(x, y)$ является выпуклым по y, то $\text{Ц}_o = 0$ и оперирующей стороне не имеет смысла добиваться информации об y.

Рассмотрим пример поиска оптимальных и абсолютно-оптимальных стратегий. Пусть $i \in M_0 = \{1, 2, 3\}$, $j \in N = \{1, 2, 3, 4\}$, случайный фактор z отсутствует. Критерий эффективности задается матрицей

$$(F(i, j))_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) $M = M_{\text{И}}$ – множество всех функций вида $\tilde{i} : N \to M_0$. Всего 81 стратегия. Здесь по следствию теоремы 3.4

$$F_{\text{И}} = F_{\Gamma}(M_{\text{И}}) = \min_{1 \le j \le 4} \max_{1 \le i \le 3} F(i, j) = 2.$$

Стратегия $\tilde{i}^0$ оптимальна, если $\min\limits_{1 \le i \le 3} F(\tilde{i}^0(j), j) = 2$ или $F(\tilde{i}^0(j), j) \ge 2, \ \forall\, j \in N$. Перечислим возможные значения оптимальной стратегии: $\tilde{i}^0(1) = \underline{2}, 3, \ \tilde{i}^0(2) = 1, 2, \underline{3}, \ \tilde{i}^0(3) = \underline{1}, 3, \ \tilde{i}^0(4) = 1, \underline{2}$. Подчеркнутые значения отвечают одной конкретной оптимальной стратегии. Всего $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ оптимальные стратегии.

Найдем все абсолютно-оптимальные стратегии

$$\tilde{i}_a : F(\tilde{i}_a(j), j) = \max_{i \in M_0} F(i, j).$$

Перечислим возможные значения абсолютно-оптимальной стратегии: $\tilde{i}_a(1) = 3, \ \tilde{i}_a(2) = 1, 2, 3, \ \tilde{i}_a(3) = 1, \ \tilde{i}_a(4) = 1, 2$. Всего 6 абсолютно-оптимальных стратегий.

б) Пусть в начале операции оперирующей стороне будет известно, какому из множеств $N_1 = \{1, 2\}$ или $N_2 = \{3, 4\}$ принадлежит значение неопределенного фактора j. Здесь стратегия имеет вид

$$\tilde{i}(j) = \begin{cases} i_1, \ j \in N_1, \\ i_2, \ j \in N_2. \end{cases}$$

Множество M состоит из 9 стратегий. В нем содержится абсолютно-оптимальная стратегия $\tilde{i}_a : i_1^a = 3, \ i_2^a = 1$. Следовательно, по теореме 3.4 $F_{\Gamma}(M) = 2$. Множество M содержит 2 оптимальные стратегии: $i_1^0 = 2, 3, \ i_2^0 = 1$.

§14. Необходимые условия для оптимальных стратегий.

Рассмотрим операцию без случайных факторов и множеством стратегий $M = M_0$. В этом случае оптимальная стратегия $x^0 \in M_0$ является максиминной:

$$W(x^0) = \max_{x \in M_0} W(x), \text{ где } W(x) = \min_{y \in N} F(x, y).$$

Поиск максиминных и минимаксных стратегий у нас встречался при решении антагонистических игр.

Найдем необходимые условия для максиминных стратегий и обсудим метод их поиска. Необходимые условия будут использовать формулу для производной по направлению функции минимума $W(x)$.

Напомним определение производной по направлению функции многих переменных. Пусть в евклидовом пространстве E^m задана функция $h(x)$. Возьмем вектор $\alpha \in E^m$, задающий направление в E^m.

Определение. Величина

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{h(x + \varepsilon\alpha) - h(x)}{\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dh(x)}{d\alpha}$$

называется производной функции $h(x)$ по направлению α в точке x.

Как известно из курса математического анализа, если функция $h(x)$ дифференцируема в E^m, то

$$\frac{dh(x)}{d\alpha} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i h'_{x_i}(x) = (\alpha, h'(x))$$

– скалярное произведение вектора α на градиент $h'(x)$ в точке x.

Функция $h(x)$ может не быть дифференцируемой в точке x^0, но иметь в этой точке производную по направлению.

Пример. Пусть $h(x) = \min[f(x), g(x)]$, где $x \in E^1$, функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы, их графики пересекаются в точке x^0 и $f'(x^0) > 0,\ g'(x^0) < 0$ (рис. 14.1).

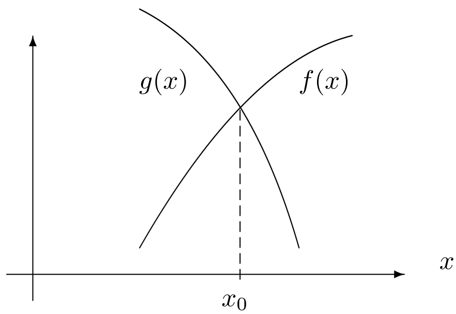


Рис. 14.1.

Функция $h(x^0)$ не дифференцируема. В точке x^0 существуют два направления, задаваемые векторами $\alpha = (1)$ и $-\alpha$.

Упражнение. Покажите, что

$$\frac{dh(x^0)}{d\alpha} = g'(x^0),\ \frac{dh(x^0)}{d(-\alpha)} = -f'(x^0).$$

Теорема 3.6. Пусть $x \in D \subset E^m$, где D – открытое множество в E^m, а y принадлежит метрическому компакту N. Предположим, что функции $F(x, y), F'_{x_i}(x, y),\ i = 1, .., m$ определены и непрерывны на $D \times N$. Тогда в любой точке $x \in D$ по любому направлению $\alpha \in E^m$ существует производная функции минимума $W(x)$, которая имеет вид

$$\frac{dW(x)}{d\alpha} = \min_{y \in N(x)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x, y), \tag{1}$$

где $N(x) = \operatorname{Arg}\min_{y \in N} F(x, y)$.

Замечание. Формула (1) показывает, что, с некоторой оговоркой, операции взятия минимума и производной по направлению перестановочны. В правой части формулы (1) вместо N фигурирует $N(x)$.

Доказательство. Заметим, что $N(x)$ – компакт как замкнутое подмножество компакта N. Рассмотрим $x \in D$ и произвольный вектор $\alpha \in E^m$. Пусть $x^k = x + \varepsilon_k \alpha,\ \varepsilon_k > 0, \lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ – последовательность векторов, сходящаяся к x. Запишем последние равенства векторов в координатах: $x_i^k - x_i = \varepsilon_k \alpha_i,\ i = 1, ..., m,\ k = 1, 2, ...$ Необходимо доказать существование предела

$$\lim_{k\to\infty} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k},$$

задаваемого формулой (1). Рассмотрим последовательность $y^k \in N(x^k),\ k = 1, 2, ...$ и любое $y \in N(x)$. Тогда

$$\frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} = \frac{F(x^k, y^k) - F(x, y)}{\varepsilon_k} =$$

$$= \frac{F(x^k, y^k) - F(x^k, y) + F(x^k, y) - F(x, y)}{\varepsilon_k} \leq$$

$$\leq \frac{F(x^k, y) - F(x, y)}{\varepsilon_k} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} (x_i^k - x_i) F'_{x_i}(x + \theta_k (x^k - x), y)}{\varepsilon_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x + \theta_k (x^k - x), y),$$

где $0 < \theta_k < 1$. Отсюда, пользуясь непрерывностью функций $F'_{x_i}(x, y)$, получим оценку для верхнего предела

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x, y),\ \forall\, y \in N(x).$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} \leq \min_{y \in N(x)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x, y). \qquad (2)$$

Для завершения доказательства достаточно установить аналогичное неравенства для нижнего предела:

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} \geq \min_{y \in N(x)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x, y). \qquad (3)$$

По определению нижнего предела существует такая подпоследовательность $k_l,\ l = 1, 2, ...$, что

$$\lim_{l\to\infty} \frac{W(x^{k_l}) - W(x)}{\varepsilon_{k_l}} = \underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k}.$$

В силу компактности множества N без потери общности можно считать, что $\lim\limits_{l\to\infty} y^{k_l} = y^* \in N$. Покажем, что $y^* \in N(x)$. Действительно, $F(x^{k_l}, y^{k_l}) \le F(x^{k_l}, y)$, $\forall\ y \in N$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $l \to \infty$, получим $F(x, y^*) \le F(x, y)$, $\forall\ y \in N \Rightarrow y^* \in N(x)$. Далее, имеем

$$\frac{W(x^{k_l}) - W(x)}{\varepsilon_{k_l}} = \frac{F(x^{k_l}, y^{k_l}) - F(x, y^*)}{\varepsilon_{k_l}} =$$

$$= \frac{F(x^{k_l}, y^{k_l}) - F(x, y^{k_l}) + F(x, y^{k_l}) - F(x, y^*)}{\varepsilon_{k_l}} \ge$$

$$\ge \frac{F(x^{k_l}, y^{k_l}) - F(x, y^{k_l})}{\varepsilon_{k_l}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} (x_i^{k_l} - x_i) F'_{x_i}(x + \theta_{k_l}(x^{k_l} - x), y^{k_l})}{\varepsilon_{k_l}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x + \theta_{k_l}(x^{k_l} - x), y^{k_l}),$$

где $0 < \theta_{k_l} < 1$. Перейдем в полученном неравенстве к пределу при $l \to \infty$ и получим

$$\lim_{k\to\infty} \frac{W(x^k) - W(x)}{\varepsilon_k} \ge \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x, y^*) \ge \min_{y \in N(x)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x, y).$$

Неравенство (3) доказано. Утверждение теоремы следует из неравенств (2) и (3), которые могут выполняться только как равенства. ■

Пример. Рассмотрим в E^3 функцию

$$W(x_1, x_2, x_3) = \min_{1 \le j \le 3} \varphi_j(x_1, x_2, x_3),$$

где $\varphi_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ \varphi_2 = x_2^{10},\ \varphi_3 = \cos(\pi x_1^2) + x_2 + 10x_3$.

Найдем производную функции $W(x)$ в точке $x^0 = (2, -2, 1)$ по направлению $\alpha = (-3, 2, -1)$. Здесь можно воспользоваться формулой (1), поскольку множество $N = \{1, 2, 3\}$ превратить в метрическое пространство, задав на нем метрику. Имеем $\varphi_1(x^0) = 9,\ \varphi_2(x^0) = 2^{10},\ \varphi_3(x^0) = \cos(4\pi) - 2 + 10 = 9$. Отсюда $N(x^0) = \{1, 3\}$. Далее

$$\varphi_1'(x^0) = (4, -4, 2),\ \varphi_3'(x^0) = (0, 1, 10),$$

$$(\alpha, \varphi_1'(x^0)) = -22,\ (\alpha, \varphi_3'(x^0)) = -8 \Rightarrow \frac{dW(x^0)}{d\alpha} = -22.$$

Перейдем к выводу необходимых условий для максиминной стратегии.

Следствие теоремы 3.6. Пусть M_0 – выпуклый компакт в E^m, а $\mathcal{L}(x^0)$ – множество допустимых направлений в точке $x^0 \in M_0$, е $x^0 \in M_0$ – максиминная стратегия. Тогда в условиях теоремы 3.6 выполнено следующее необходимое условие:

$$\sup_{\alpha\in\mathcal{L}(x^0)} \min_{y\in N(x^0)} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F'_{x_i}(x^0, y) \leq 0. \qquad (4).$$

Доказательство. Функция $W(x)$ достигает в точке $x^0 \in M_0$ наибольшего значения. Поэтому

$$\frac{dW(x^0)}{d\alpha} = \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{W(x^0+\varepsilon\alpha) - W(x^0)}{\varepsilon} \leq 0 \ \ \forall\, \alpha \in \mathcal{L}(x^0),$$

поскольку при малых $\varepsilon > 0$ вектор $x^0 + \varepsilon\alpha$ принадлежит M_0 по определению допустимого направления α. ■

Теперь займемся упрощением условия (4) для частных случаев. Пусть $M_0 = [a, b]$ – отрезок.

Теорема 3.7. Пусть функции $F(x, y), F'_x(x, y)$ непрерывны на множестве $D \times N$, где D – интервал, содержащий отрезок $M_0 = [a, b]$, а N – компакт метрического пространства. Тогда для максиминной стратегии $x^0 \in M_0$ выполнено хотя бы одно из следующих трех условий:

1) $x^0 = a$ или $x^0 = b$;

2) найдутся $y^1 \neq y^2 \in N(x^0) = \mathrm{Arg}\min\limits_{y\in N} F(x, y)$;

3) $N(x^0) = \{y^1\}$ и $F'_x(x^0, y^1) = 0$.

Замечание. Теорема обобщает необходимые условия для точки максимума x^0 дифференцируемой функции на отрезке: либо точка x^0 является концом отрезка, либо производная функции в точке x^0 равна нулю.

Доказательство. Пусть x^0 – оптимальная стратегия. Если выполнены условия 1) или 2), то все доказано. Пусть условия 1) и 2) не выполнены, т.е. $a < x^0 < b$ и $N(x^0) = \{y^1\}$. Покажем, что обязательно выполнено условие 3). Из формулы (4) следует, что для двух допустимых направлений $\alpha = (1)$ и $-\alpha$ выполнены неравенства

$$\frac{dW(x^0)}{d\alpha} = 1 \cdot F'_x(x^0, y^1) \leq 0, \ \frac{dW(x^0)}{d(-\alpha)} = (-1) \cdot F'_x(x^0, y^1) \leq 0.$$

Следовательно, $F'_x(x^0, y^1) = 0$. ■

Следствие. Пусть в условиях теоремы 3.7

$$N = \{y \in E^n \mid c_j \leq y_j \leq d_j, \ j = 1, ..., n\}$$

– параллелепипед евклидова пространства E^n, в любой точке которого существуют производные $F'_{y_j}(x, y), \ j = 1, ..., n$. Тогда для максиминной стратегии $x^0 \in M_0 = [a, b]$ выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

) $\exists\, y^1 \in N(x^0)$:

$$F'_x(x^0, y^1)(x^0 - a)(x^0 - b) =$$

$$= F'_{y_j}(x^0, y^1)(y_j^1 - c_j))(y_j^1 - d_j) = 0, \ j = 1, ..., n. \tag{15.1}$$

) $\exists\, y^1 \neq y^2 \in N(x^0):$

$$F(x^0, y^1) = F(x^0, y^2), \ \ F'_{y_j}(x^0, y^1)(y_j^1 - c_j)(y_j^1 - d_j) =$$

$$= F'_{y_j}(x^0, y^2)(y_j^2 - c_j)(y_j^2 - d_j) = 0, \ j = 1, ..., n. \tag{15.2}$$

Доказательство. По теореме 3.7 для x^0 выполнено одно из условий 1),2) или 3). Покажем, что из 1) или 3) следует условие а). Поскольку $y^1 \in N(x^0)$, то $\min\limits_{c_j \le y_j \le d_j} F(x^0, y^1||y_j) = F(x^0, y^1)$. Теперь остается воспользоваться необходимыми условиями для точки минимума y_j^1 функции $F(x^0, y^1||y_j)$ на отрезке $[c_i, d_j]$. Из них получаем уравнения

$$F'_{y_j}(x^0, y^1)(y_j^1 - c_j))(y_j^1 - d_j) = 0, \ j = 1, ..., n.$$

Далее, из 2) следует условие б). ■

Отметим особенности полученных необходимых условий. В системе (15.1) число уравнений $n+1$ совпадает с числом неизвестных $x^0, y_1^1, ..., y_n^1$. Поэтому можно надеяться, что система (15.1) имеет конечный набор решений. В системе (15.2) число уравнений $2n+1$ также совпадает с числом неизвестных $x^0, y_1^1, ..., y_n^1, \ y_1^2, ..., y_n^2$.

Можно следующим образом использовать эти необходимые условия. Сначала находим все решения систем (15.1) и (15.2). Пусть первые компоненты x^0 этих решений образуют множество M_0^*, а соответствующие компоненты y^1, y^2 образуют множество N^*. Тогда $x^0 \in \mathrm{Arg} \max\limits_{x \in M_0^*} \min\limits_{y \in N^*} F(x, y)$.

Пример. Пусть $F(x, y) = -(x - y + y^3)^2, \ M_0 = N = [-1, 1]$.По смыслу $F(x, y)$ – квадрат отклонения (со знаком минус) величины x от значения функции $\varphi(x) = y - y^3$. График функции $\varphi(x)$ изображен на рис. 15.1.

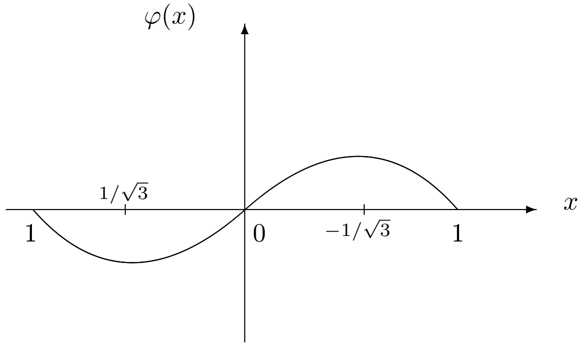


Рис. 15.1

Здесь

$$N(x) = \begin{cases} \left\{ 1/\sqrt{3} \right\}, \ x < 0 \\ \left\{ \pm 1/\sqrt{3} \right\}, \ x = 0 \\ \left\{ -1/\sqrt{3} \right\}, \ x > 0. \end{cases}$$

При $y \in N(x)$ $F'_x(x,y) = -2(x - y - y^3) \neq 0$. Поэтому для максиминной стратегии система а) не выполнена, следовательно, выполнена система б). Имеем $M_0^* = \{-1, 0, 1\}, \ N^* = \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$,

$$(F(x,y))_{M_0^* \times N^*} = \begin{array}{c} \\ -1 \\ 0 \\ +1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad\frac{1}{\sqrt{3}}\quad & \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 & -\left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ -\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 & -\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ -\left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 & -\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Отсюда $x^0 = 0$ – максиминная стратегия. Отметим, что в этом примере выполнено условие б), а условие а) для x^0 не выполнено.

Легко построить пример, где, наоборот, для максиминной стратегии x^0 выполнено условие а), а условие б) не выполнено. Пусть, например, функция $F(x,y)$ строго выпукла по y. В этом случае при любом $x \in M_0$ множество $N(x)$ состоит из единственного элемента.

§15. Задачи оптимального распределения ресурсов.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые задачи оптимального распределения ресурсов. Будут сформулированы условия оптимальности, а также указаны алгоритмы поиска оптимальных распределений ресурсов.

Пусть $i = 1, ..., n$, – номера n пунктов, по которым оперирующая сторона распределяет ресурс. Через $f_i(t)$ обозначим функцию, определяющую эффект от вложения ресурса в количестве t в i-й пункт. Вектор $x = (x_1, ..., x_n)$ задает стратегию распределения ресурса. При этом на i-й пункт направляется ресурс в количестве x_i.

Будем рассматривать два вида задач: непрерывные, где ресурс предполагается бесконечно-делимым, и дискретные, где ресурс – штучный, а A и x_i – целые числа. Для непрерывной задачи множество стратегий имеет вид

$$M_0 = \{x \in E^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = A,\ x_i \geq 0,\ i = 1, ..., n\},$$

а для дискретной –

$$M_0' = \{x \in E^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = A,\ x_i \geq 0,\ x_i \in \mathcal{Z},\ i = 1, ..., n\},$$

где $\mathcal{Z}$ – множество целых чисел.

Рассмотрим следующую непрерывную задачу:

$$\max_{x \in M_0} \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i) = \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0). \qquad (I)$$

По смыслу оперирующая сторона стремится максимизировать свертку вида $\min\limits_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i)$, т.е. минимальный эффект от вложения ресурса. Это отвечает социалистическому принципу: "чтобы не было бедных". Максиминную стратегию x^0 будем называть *оптимальным распределением ресурса.*

Задачу (I) будем рассматривать в предположении, что все функции $f_i(t)$ непрерывны и возрастают на отрезке $[0, A]$. Кроме того, без потери общности будем считать, что

$$f_1(0) \leq f_2(0) \leq ... \leq f_n(0).$$

Будем условно говорить, что первый пункт является слабейшим: если пунктам не выделяется ресурс, то эффект на первом пункте будет наименьшим.

Теорема 3.8. (принцип уравнивания Ю.Б. Гермейера). В сделанных предположениях пусть x^0 – оптимальное распределение ресурса в задаче (I). Тогда для x^0 выполнено следующее необходимое и достаточное условие: найдется такое целое $k,\ 1 \leq k \leq n$, что

$$\begin{cases} f_i(x_i^0) = f_k(x_k^0) < f_{k+1}(0),\ i = 1, ..., k-1, \\ x_i^0 = 0,\ i = k+1, .., n. \end{cases} \qquad (1)$$

Если $f_1(0) = f_2(0) = ... = f_n(0)$, то $k = n$. Во всех случаях оптимальное распределение ресурса x^0 единственно.

Замечание. Оптимальное распределение ресурса предполагает его выделение нескольким слабым пунктам с выравниванием эффекта по этим пунктам.

Доказательство. Необходимость. Заметим, что оптимальное распределение x^0 существует, поскольку функция $\min\limits_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i)$ непрерывна на компакте M_0. Определим число k из условия

$$f_k(0) \leq \min_{1 \leq i \leq n} f_i(x_i^0) < f_{k+1}(0). \qquad (2)$$

Если $k = n$, то второе неравенство в (2) отсутствует. Нетрудно видеть, что указанное k всегда найдется. Действительно, в силу монотонности функций $f_i(t)$ справедливо неравенство

$$f_1(0) \le \min_{1\le i\le n} f_i(x_i^0).$$

Поэтому число $\min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)$ принадлежит одному из полуинтервалов

$$[f_i(0), f_{i+1}(0)),\ i = 1, ..., n.$$

Здесь при $f_i(0) = f_{i+1}(0)$ соответствующий интервал пуст, а $f_{n+1}(0)$ полагается равным ∞.

Пусть $k < n$. Покажем, что $x_i^0 = 0,\ i = k+1, ..., n$. Предположим, что при некотором $i_1 \ge k+1\ \ x_{i_1}^0 > 0$. Определим следующий вектор z :

$$z_i = \begin{cases} x_{i_1}^0 - \varepsilon, & i = i_1, \\ x_{i_1}^0 + \dfrac{\varepsilon}{n-1}, & i \ne i_1,\ \varepsilon > 0. \end{cases}$$

При малом $\varepsilon > 0$ вектор z принадлежит M_0. Действительно, его компоненты при $\varepsilon \in (0, x_{i_1}^0)$ положительны, а их сумма равна A.

Используя монотонность функций $f_i(t)$, получим, что при $i \ne i_1$

$$f_i(z_i) > f_i(x_i^0) \ge \min_{1\le i\le n} f_i(x_i^0),$$

а при $i = i_1$

$$f_{i_1}(z_{i_1}) > f_{i_1}(0) \ge f_{k+1}(0) \overset{(2)}{>} \min_{1\le i\le n} f_i(x_i^0).$$

Отсюда $\min\limits_{1\le i\le n} f_i(z) > \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)$, что противоречит оптимальности x^0.

Докажем, что $f_i(x_i^0) = \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)$ при $i = 1, ..., k$. Предположим противное. Тогда найдется такой номер $i_1 \le k$, что $f_{i_1}(x_{i_1}^0) > \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)$. Покажем, что $x_{i_1}^0 > 0$. Действительно, в противном случае $\min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0) < f_{i_1}(0) \le f_k(0)$, что противоречит (2).

Итак, $x_{i_1}^0 > 0$. Возьмем определенное выше распределение z. Как и раньше, при $i \ne i_1$ выполнено неравенство $f_i(z_i) > \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)$, а неравенство $f_{i_1}(z_{i_1}) = f_{i_1}(x_{i_1}^0 - \varepsilon) > \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)$ будет выполнено при малом $\varepsilon > 0$, поскольку функции $f_i(t)$ непрерывны. Отсюда, как и выше, получаем противоречие. Условие (1) доказано.

Достаточность. Пусть стратегия $x^0 \in M_0$ удовлетворяет условию (1). Покажем, что x^0 – оптимальное распределение ресурса. Возьмем произвольную стратегию $x \in M_0$, отличную от x^0. Поскольку суммы компонент этих векторов равны A, существует такой номер j, что $x_j < x_j^0$. Отсюда следует, что $x_j^0 > 0$. Поэтому $\min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i) \le f_j(x_j) < f_j(x_j^0) = \min\limits_{1\le i\le n} f_i(x_i^0)$, т.е.

x^0 – оптимальное распределение ресурса. Единственность оптимального распределения x^0 следует из последнего строгого неравенства. ■

Рассмотрим алгоритм поиска оптимального распределения ресурса. Берем последовательно $k = n, n-1, ..., 1$ и решаем систему уравнений

$$f_i(x_i^0) = C,\ i = 1, ..., k,\ x_i^0 = 0,\ i = k+1, ..., n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i^0 = A \tag{3}$$

относительно неизвестных $C, x_1^0, ..., x_n^0$. Если полученное решение имеет неотрицательные компоненты x_i^0 и при $k < n$ выполнено неравенство $C < f_{k+1}(0)$, то x^0 – оптимальное распределение ресурса. В противном случае уменьшаем значение k и вновь решаем систему.

Часто встречается оптимизационная задача вида

$$\min_{x \in M_0} \max_{1 \le i \le n} f_i(x_i) = \max_{1 \le i \le n} f_i(x_i^0).$$

Здесь предполагается, что каждая функция $f_i(t)$ убывает, ее значение можно интерпретировать как величину ущерба при вложении ресурса в количестве t.

Пример. Оптимизация структуры страхового портфеля. Страховая компания проводит массовое страхование по нескольким видам рисков. Пусть x_i – число договоров, заключенных по i-у виду страхования, а ξ_{ij} – случайная величина иска по j-у договору, $j = 1, ..., x_i$. Будем считать, что случайные величины ξ_{ij} независимы, каждая из них имеет математическое ожидание m_i и дисперсию V_i. Величина m_i – это стоимость полиса без надбавок за риск и текущих расходов компании. Пусть θ_i – относительная рисковая надбавка, которая взимается с целью обезопасить страховую компанию от разорения. Стоимость полиса при этом возрастает до величины $m_i(1+\theta_i)$. Пусть $\xi_i = \sum\limits_{j=1}^{x_i} \xi_{ij}$ – суммарный иск со стороны клиентов по i-у виду страхования. Надбавка θ_i выбирается из условия, состоящего в том, что событие[1]

$$\{\xi_i \ge x_i m_i (1+\theta_i)\} = \left\{ Y_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\xi_i - x_i m_i}{\sqrt{x_i V_i}} \ge \frac{x_i m_i \theta_i}{\sqrt{x_i V_i}} \right\}$$

должно выполняться с малой вероятностью α. При больших x_i случайная величина Y_i имеет стандартное нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Указанное событие выполнено с требуемой вероятностью α, если правая часть неравенства равна квантилю y_α функции распределения нормального закона

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

[1] Его называют *техническим разорением* по i-у виду страхования.

т.е. y_α находится из уравнения $1 - \Phi(y_\alpha) = \alpha$. Отсюда получаем формулы для относительных рисковых надбавок по каждому виду страхования

$$\theta_i(x_i) = \frac{\sqrt{V_i} y_\alpha}{\sqrt{x_i} m_i},\ i = 1, ..., n.$$

Пусть A – общее число договоров. Вектор $x \in M_0$ отражает структуру страхового портфеля. Здесь допускается нецелое число договоров x_i. Рассмотрим задачу $\min\limits_{x \in M_0} \max\limits_{1 \le i \le n} \theta_i(x_i)$. Чем меньше наибольшая относительная рисковая надбавка, тем более конкурентно-способна страховая компания.

Перейдем теперь к задаче дискретного максимина:

$$\max_{x \in M_0'} \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i) = \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*). \qquad (I)'$$

Здесь $f_i(t)$ – возрастающие функции целого аргумента.

Положим $I = \{1, ..., n\}$ и для $x \in M_0'$ определим множество

$$I(x) = \operatorname{Arg} \min_{i \in I} f_i(x).$$

Обозначим через $|I(x)|$ число элементов множества $I(x)$.

Теорема 3.9. Пусть x^* – такое оптимальное распределение ресурсов задачи $(I)'$, при котором величина $|I(x^*)|$ минимальна среди всех оптимальных распределений. Тогда необходимо выполнено условие:

$$\text{если } x_j^* > 0, \text{ то } \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*) \ge f_j(x_j^* - 1). \qquad (3)$$

Условие (3) является достаточным условием оптимальности.

Замечание. Условие (3) показывает, что при положительной компоненте x_j^* величина $f_j(x_j^*)$ близка к $\min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*)$. Это дискретный аналог принципа уравнивания.

Доказательство. Необходимость. Пусть x^* – указанное в условии теоремы оптимальное распределение ресурса задачи $(I)'$. Предположим, что условие (3) не выполнено. Тогда найдется такой номер j, что $x_j^* > 0$ и $f_j(x_j^* - 1) > \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*)$. Отсюда следует, что $j \notin I(x^*)$. Возьмем номер $l \in I(x^*)$ и определим новое распределение $z \in M_0'$:

$$z_i = \begin{cases} x_j^* - 1, & i = j, \\ x_l^* + 1, & i = l, \\ x_i^*, & i \ne j, l. \end{cases}$$

Тогда $f_l(z_l) > f_l(x_l^*),\ f_j(z_j) > \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*)$. Отсюда следует, что $\min\limits_{1 \le i \le n} f_i(z_i) > \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*) \Rightarrow \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(z_i) = \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*)$, так как x^* – оптимальное распределение ресурса. Итак, распределение z также оптимально. При этом $I(z) = I(x^*) \backslash \{l\}$, что противоречит определению x^*.

Достаточность. Пусть условие (3) выполнено. Возьмем произвольное $x \in M_0'$, $x \neq x^*$. Тогда найдется такой номер j, что $x_j^* > x_j$. Отсюда $x_j^* > 0$ и

$$\min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*) \overset{(3)}{\ge} f_j(x_j^* - 1) \ge f_j(x_j) \ge \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i).$$

Итак, x^* – оптимальное распределение ресурса. ■

Рассмотрим алгоритм поиска оптимального распределения задачи $(I)'$. Пусть $x^{(1)}$ – произвольное распределение ресурса. Допустим, что алгоритм проработал до k-го шага и мы получили распределение $x^{(k)}$. Если для $x^{(k)}$ выполнено условие (3), то по теореме 3.9 оно и будет искомым оптимальным распределением. Допустим, что для $x^{(k)}$ условие (3) не выполнено. Тогда найдется такой номер j, что $x_j^{(k)} > 0$ и $f_j(x_j^* - 1) > \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x_i^*)$. Определим новое распределение $x^{(k+1)} = z$, как это сделано в доказательстве теоремы 3.9. При этом нужно заменить x^* на $x^{(k)}$. Могут возникнуть два случая:

1) $I(x^{(k)}) = \{l\}$. Тогда

$$\min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^{(k+1)}) > \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^{(k)}).$$

2) $|I(x^{(k)})| > 1$. Тогда

$$\min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^{(k+1)}) = \min_{1 \le i \le n} f_i(x_i^{(k)}), \text{ но } |I(x^{(k+1)})| < |I(x^{(k)})|.$$

Таким образом, на каждом шаге алгоритма либо увеличивается значение функции минимума, либо сокращается множество $I(x^{(k)})$. Отсюда следует, что алгоритм закончит работу через конечное число шагов, поскольку множество M_0' содержит конечное число элементов.

На практике в качестве начального берут распределение $x^{(1)}$, близкое к оптимальному распределению соответствующей непрерывной задачи.

Пример. Рассмотрим задачу нахождения $\max\limits_{x \in M_0'} \min\limits_{1 \le i \le 4} i x_i^2$, где

$$M_0' = \{x \in E^4 \mid \sum_{i=1}^{4} x_i = 10,\ x_i \ge 0,\ x_i \in \mathcal{Z},\ i = 1, 2, 3, 4\}.$$

Для решения применим указанный алгоритм. Возьмем начальное распределение $x^{(1)} = (4, 3, 2, 1)$. Все вычисления сведем в таблицу

i	$x_i^{(1)}$	$i\big(x_i^{(1)}\big)^2$	$i\big(x_i^{(1)} - 1\big)^2$	$x_i^{(2)}$	$i\big(x_i^{(2)}\big)^2$	$i\big(x_i^{(2)} - 1\big)^2$
1	4	16	9	3	$\underline{9}$	4
2	3	18	8	3	18	8
3	2	12	3	2	12	3
4	1	$\underline{4}$	0	2	16	4

Здесь $I(x^{(1)}) = \{4\}$ и условие (3) для $x^{(1)}$) не выполнено при $j = 1$. Далее, $I(x^{(2)}) = \{1\}$ и условие (3) выполнено. Итак, $x^{(2)}$ – оптимальное распределение ресурса.

Упражнение. Найдите оптимальное распределение ресурса в соответствующей непрерывной задаче.

Рассмотрим еще одну непрерывную задачу:

$$\max_{x \in M_0} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^0). \qquad (II)$$

Пример интерпретации задачи. Инвестор распределяет капитал A по n проектам, где $f_i(t)$ – прибыль, получаемая от вложения капитала t в i-й проект. В отличие от задачи (I), функции $f_i(t)$ необязательно возрастающие. Предположим, что они дифференцируемы на отрезке $[0, A]$.

Теорема 3.10.(Лемма Гиббса). Пусть x^0 – оптимальное распределение ресурса в задаче (II). Тогда найдется такое число λ, что выполнено следующее необходимое условие:

$$\begin{cases} f_i'(x_i^0) = \lambda, \ x_i^0 > 0, \\ f_i'(x_i^0) \leq \lambda, \ x_i^0 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Если функции $f_i(t)$ вогнуты, то (1) является достаточным условием оптимальности. Если дополнительно известно, что функции $f_i(t)$ дважды дифференцируемы и

$$f_1'(0) \geq f_2'(0) \geq ... \geq f_n'(0), \ f_i''(0) < 0, \ i = 1, ..., n,$$

то найдется такой номер l, что

$$x_i^0 > 0, \ i = 1, ..., l, \ x_i^0 = 0, \ i = l+1, ..., n.$$

Замечание. Условие (1) является принципом уравнивания для производных $f_i'(t)$. Последнее утверждение означает, что при упорядоченности производных $f_i'(0)$ по убыванию вложение ресурса в первые пункты наиболее эффективно.

Доказательство. Необходимость. Пусть x^0 – оптимальное распределение ресурсов в задаче (II), а $x_i^0 > 0$. Возьмем произвольный номер $j \neq i$ и определим функцию от ε

$$\varphi(\varepsilon) = f_i(x_i^0 - \varepsilon) + f_j(x_j^0 + \varepsilon) + \sum_{k \neq i,j} f_k(x^0).$$

на отрезке $[0, x_i^0]$. Поскольку x^0 – оптимальное распределение ресурса, $\varphi(\varepsilon)$ достигает на отрезке $[0, x_i^0]$ наибольшего значения в точке $\varepsilon = 0$. Поэтому $\varphi'(0) \leq 0$ или

$$f_j'(x_j^0) \leq f_i'(x_i^0). \qquad (2)$$

Если $x_j^0 > 0$, то, меняя местами i и j, получим неравенство

$$f_j'(x_j^0) \geq f_i'(x_i^0). \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что $f'_j(x_j^0) = f'_i(x_i^0) = \lambda$, т.е. при положительных вложениях ресурса в пункты i и j значения соответствующих производных совпадают. Из (2) следует, что $f'_j(x_j^0) \leq \lambda$ при всех j. Условие (1) доказано.

Достаточность. Пусть функции $f_i(t)$ вогнуты и распределение ресурса x^0 удовлетворяет условию (1). Возьмем произвольное распределение $x \in M_0$. Из вогнутости функций $f_i(t)$ имеем неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n}(f_i(x_i) - f_i(x_i^0)) \leq \sum_{i=1}^{n} f'_i(x_i^0)(x_i - x_i^0).$$

Если $x_i^0 > 0$, то подставим в последнее выражение $f_i(x_i^0) = \lambda$, а если $x_i^0 = 0$, то $x_i - x_i^0 = x_i \geq 0$ и производную $f_i(x_i^0)$ оцениваем сверху величиной λ. В результате

$$\sum_{i=1}^{n} f'_i(x_i^0)(x_i - x_i^0) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda(x_i - x_i^0) = \lambda(A - A) = 0.$$

Итак, $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i^0))$ при любом $x \in M_0$, что и доказывает оптимальность x^0.

Предположим, что

$$f'_1(0) \geq f'_2(0) \geq ... \geq f'_n(0),\ f''_i(0) < 0,\ i = 1, ..., n.$$

Предположим, что найдется такой номер i, что $x_i^0 = 0,\ x_{i+1}^0 > 0$. Тогда

$$f'_i(x_i^0) = f'_i(0) \overset{(1)}{\leq} \lambda = f'_{i+1}(x_{i+1}^0) < f'_{i+1}(0).$$

Последнее неравенство следует из условия $f''_{i+1}(0) < 0$. Поэтому $f'_i(0) < f'_{i+1}(0)$ (противоречие). ■

Пример. Задача поиска объекта.

Объект прячется в n возможных областях с номерами $i = 1, ..., n$. Если он находится в i-ой области и поиск в ней ведется в течение времени t, то условная вероятность его обнаружения равна $1 - e^{-\mu_i t}$, где $\mu_i > 0$. Обозначим через p_i известную априорную вероятность нахождения объекта в i-й области. Пусть A – общее время поиска объекта. Стратегия поиска $x = (x_1, ..., x_n) \in M_0$ означает, что объект в области i ищется в течение времени x_i. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(1 - e^{-\mu_i x_i})$ – полная вероятность обнаружения объекта, которую необходимо минимизировать.

Определим функции $f_i(t) = p_i(1 - e^{-\mu_i t})$ и решим задачу $(II)'$. Заметим, что $f''_i(t) = -p_i\mu_i^2(1 - e^{-\mu_i t}) < 0$. Следовательно, функции $f_i(t)$ являются вогнутыми. Упорядочим значения производных в нуле $f'_i(0) = p_i\mu_i$:

$$p_1\mu_1 \geq p_2\mu_2 \geq ... \geq p_n\mu_n.$$

В соответствии с леммой Гиббса найдется такой номер l, что

$$x_i^0 > 0,\ i = 1, ..., l,\ x_i^0 = 0,\ i = l+1, ..., n.$$

Запишем условие (1)

$$\begin{cases} f_i(x_i^0) = \lambda,\ i = 1, ..., l, \\ f_i(x_i^0) \le \lambda,\ i = l+1, ..., n. \end{cases} \tag{1}$$

Получаем систему уравнений Отсюда находим

$$x_i^0 = \frac{\ln(p_i \mu_i)}{\mu_i} - \frac{1}{\mu_i} \ln \lambda,\ i = 1, ..., l. \tag{2}$$

Складывая эти равенства, получим

$$A = \sum_{k=1}^{l} \frac{\ln(p_k \mu_k)}{\mu_k} - \ln \lambda \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\mu_k}.$$

Отсюда найдем $\ln \lambda$ и после подстановки в (2) находим

$$x_i^0 = \frac{\ln(p_i \mu_i)}{\mu_i} - \frac{1}{\mu_i} \left(\sum_{k=1}^{l} \frac{\ln(p_k \mu_k)}{\mu_k} - A \right) \left(\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\mu_k} \right)^{-1},\ i = 1, ..., l.$$

Поскольку произведения $p_i \mu_i$ упорядочены, для того чтобы компоненты $x_i^0,\ i = 1, ..., l$, были положительными, достаточно потребовать выполнения неравенства $x_l^0 > 0$ или

$$A > \sum_{k=1}^{l} \frac{\ln(p_k \mu_k)}{\mu_k} - \ln(p_l \mu_l) \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\mu_k}. \tag{4}$$

Необходимо также проверить неравенства

$$f_i(0) = p_i \mu_i \le \lambda,\ i = l+1, ..., n,$$

или $p_{l+1}\mu_{l+1} \le \lambda$, поскольку $p_i \mu_i$ упорядочены. Последнее неравенство прологарифмируем и подставим выражение для

$$\ln \lambda = \left(\sum_{k=1}^{l} \frac{\ln(p_k \mu_k)}{\mu_k} - A \right) \left(\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\mu_k} \right)^{-1}.$$

В результате получим

$$\ln(p_{l+1}\mu_{l+1}) \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\mu_k} \le \sum_{k=1}^{l} \frac{\ln(p_k \mu_k)}{\mu_k} - A.$$

Добавим к обеим частям выражение $\ln(p_{l+1}\mu_{l+1})(\mu_{l+1})^{-1}$ и в результате получим неравенство

$$A \leq \sum_{k=1}^{l+1} \frac{\ln(p_k\mu_k)}{\mu_k} - \ln(p_{l+1}\mu_{l+1}) \sum_{k=1}^{l+1} \frac{1}{\mu_k}. \qquad (5)$$

Итак, номер l выбирается из условий (4),(5), либо $l = n$. Заметим, что неравенство (4) выполнено при $l = 1$. Нетрудно видеть, что выражение

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{\ln(p_k\mu_k)}{\mu_k} - \ln(p_l\mu_l) \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\mu_k}$$

не убывает по l. Исследование модели полностью завершено.

Рассмотрим дискретный аналог задачи (II) :

$$\max_{x\in M_0'} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^*) \qquad (II)'.$$

Здесь $f_i(t)$ – возрастающие функции целого аргумента. Пусть, кроме того, выполнено следующее условие вогнутости:
если $x_i > 0$, то $f_i(x_i) \geq 0.5(f_i(x_i+1) - f_i(x_i-1))$ или

$$f_i(x_i) - f_i(x_i-1) \geq f_i(x_i+1) - f_i(x_i). \qquad (1)$$

Неравенство (1) означает, что разность между значениями функции f_i в соседних точках не возрастает.

Теорема 3.10. (Критерий Гросса). В сделанных предположениях пусть x^* – оптимальное распределение ресурса в задаче $(II)'$. Тогда для x^* выполнено необходимое и достаточное условие:

$$x_j^* > 0 \Rightarrow f_j(x_j^*) - f_j(x_j^*-1) \geq \max_{i\leq i\leq n}[f_i(x_i^*+1) - f_i(x_i^*)]. \qquad (2)$$

Замечание. При положительном x_j^* разность $f_j(x_j^*) - f_j(x_j^*-1)$, представляющая собой дискретную производную, близка к правой части неравенства (2). Таким образом, условие (2) представляет собой дискретный аналог принципа уравнивания для производных.

Доказательство. Необходимость. Пусть x^* – оптимальное распределение ресурса в задаче $(II)'$. Покажем, что выполнено условие (2). Предположим противное, т.е. найдется такой номер j, что $x_j^* > 0$ и

$$f_j(x_j^*) - f_j(x_j^*-1) < \max_{i\leq i\leq n}[f_j(x_i^*+1) - f_i(x_i^*)] = f_l(x_l^*+1) - f_l(x_l^*).$$

Заметим, что $l \neq j$, поскольку при $l = j$ нарушалось условие (1) для функции f_j в точках x_j^*. Определим вектор z :

$$z_i = \begin{cases} x_j^*-1, \ i=j, \\ x_j^*+1, \ i=l, \\ x_i^*, \qquad i\neq j,l. \end{cases}$$

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$f_j(x_j^*) + f_l(x_l^*) < f_j(x_j^* - 1) + f_l(x_l^* + 1).$$

Отсюда $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i^*) < \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(z_i)$, что противоречит определению x^*.

Достаточность. Пусть для распределения ресурса x^* выполнено условие (2). Возьмем любое распределение $x \in M_0'$, $x \neq x^*$. Докажем, что

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i^*). \tag{3}$$

Положим

$$\lambda = \max_{i \leq i \leq n} [f_i(x_i^* + 1) - f_i(x_i^*)].$$

Покажем, что при всех i выполнено неравенство

$$f_i(x_i^*) - f_i(x_i) \geq \lambda(x_i^* - x_i). \tag{4}$$

Складывая неравенства (4), получим (3) и завершение доказательства. Рассмотрим два случая

1) $x_i^* > x_i$. Тогда $x_i^* > 0$. Из условия (2) $f_i(x_i^*) - f_i(x_i^* - 1) \geq \lambda$. Поскольку разности не возрастают, получим еще неравенства

$$f_i(x_i^* - 1) - f_i(x_i^* - 2) \geq \lambda,$$

$$\cdots \cdots$$

$$f_i(x_i^* - 1) - f_i(x_i^* - 2) \geq \lambda.$$

Всего $x_i^* - x_i$ неравенств. Складывая эти неравенства, получим $f_i(x_i^*) - f_i(x_i) \geq \lambda(x_i^* - x_i)$.

2) $x_i > x_i^*$. По определению λ имеем $f_i(x_i^* + 1) - f_i(x_i^*) \leq \lambda$. Поскольку разности не возрастают получим еще неравенства

$$f_i(x_i^* + 2) - f_i(x_i^* + 1) \geq \lambda,$$

$$\cdots \cdots$$

$$f_i(x_i) - f_i(x_i - 1) \geq \lambda.$$

Всего $x_i - x_i^*$ неравенств. Складывая эти неравенства, получим $f_i(x_i) - f_i(x_i^*) \leq \lambda(x_i - x_i^*)$ или (4). ■

Упражнения. 1. Сформулируйте аналоги теорем 3.10 и 3.11 для непрерывной и дискретной задач на минимум $\min\limits_{x \in M_0} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ и $\min\limits_{x \in M_0'} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i)$.

2. На основе критерия Гросса разработайте алгоритм решения задачи $(II)'$. Докажите, что этот алгоритм сходится за конечное число шагов.